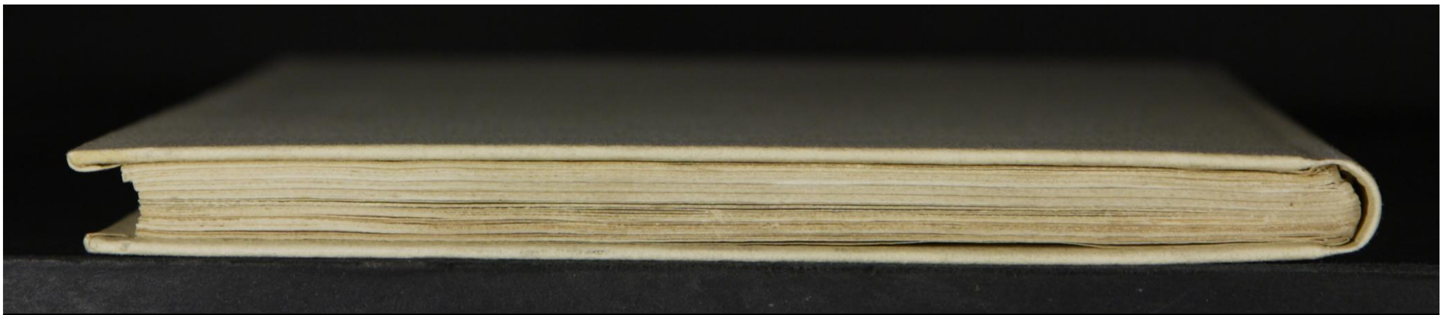

1
7
173







JOANNIS BAPTISTÆ PALMÆ NEAPOLITANI
IN GEOMETRIAM EXERCITATIONES

Illustriss.mo & Excellentiss.mo Domino

CARMINO NICOLAO CARACCIOLO

Castelli de Sangro Duci,

Et PRINCIPIS S. BONI Filio meritissimo

DICATÆ.





NEAPOLI, 1689. Ex Nova Sociorum Officinâ
Dom. Ant. Parrino, & Michaelis Aloysii Mutii.

SUPERIORUM PERMISSU.



Illustriss.^mo & Excellentiss.^mo Domino

CARMINO NICOLAO CARACCIOLO

CASTELLI DE SANGRO DUCI,

Et PRINCIPIS S. BONI Filio meritissimo

Joannes Baptista Palma.



Uoniam homo ex omnibus animantibus factus est à Divina Omnipotentia mentis, ac rationis particeps, ut à rebus creatis ad cognitionem tantarum rerũ Opificis perveniat, nihil sane illi suaviùs evenire potest, quam res incorporeas, corporeasque, & earum causas contemplari, atque in novarũ artium, scientiarumque investigationem sua studia conferre: inter hæc vero summam nos ex Matheseos studio capere voluptatem, omnibus in confesso est;

ea enim adeo eſt & ſubiecto, & certitudine nobilis, atque jucunda, ut intellectus noſter, qui nihil niſi veri cognitionem affectat, quaſi in una hac diſciplina pabulum invenire videatur qua de re merito ea inter reliquas ſcientias principem locum obtinet. Nec ſecus divinus Plato in Philebo ſentit; eam enim ſcientiam eſſe digniorem ait, & præſtantiorem, in qua plus ſynceritatis, veritatiſque elucet, quæ omnia in Matheſi maximè reperiuntur. Accedit ad Mathematicarum diſciplinarum præſtantiam ſumma, quã nobis afferunt utilitatem ad philoſophiam naturalẽ, & ad reliquas hujuſmodi facultates, arteſque perdiſcendas, quæ tanta eſt, ut dubium non ſit quin fallantur ij præcipuè, qui ad rerum naturalium contẽplationem ſine ipſarum auxilio ſuum animum adjungunt. Etenim quis unquam de cœlorum ſtructurâ, Planetarum, ſtellarumque motibus, ac magnitudine quidquam ſtatuet Mathematicis doctrinis nõ imbutus? Quis Opticorum, & Catopticorum ope deſtitutus Circuli lactei, Cometarum, Iridis, Pareliorum, Virgarum, aliorumque hujuſmodi pernoſcet naturam? Nec profectò video quiſnam de Terræ amplitudine, ac rotunditate ſuppeditaverit nobis argumentum niſi à Geometris id petamus. Præterquamquod nec humani corporis, aliorumque animantium fabricam, ut cur muſculorum tendones hîc in oſſium capita, alibi in os medium inſerantur, neq; eorundem vel ſaltem aliquas actiones ſatis intelligemus

mus

mus ſine prævio Mathematicorum auxilio. Adeo
ut ad hæc omnia, totamque rerum naturam intelli-
genda neceſſaria; nedum utilis merito videatur Ma-
theſis. Quam ſane ſententiam Philoſophi plerique
omnes edocuerunt. Unum hîc referam peripateti-
cum Simplicium contrà iſtos Ariſtippeos. qui *ut li-
teræ* inquit, *diſcendæ ſunt ad Mathemata percipiē-
da, ita ea propter Philoſophiam.* Quare idem efficere
mihi videtur is, qui Mathematicis diſciplinis non
deguſtatis, repente ad Philoſophos divertit, quod
qui alicujus codicis materiam intellecturus, ejuſdem
tamen characteres minime tenet. Mathematicis
enim characteribus, nimirum triangulis, atque cir-
culis (ut Magnus Galilæus loquitur) Philoſophiæ;
hoc eſt Naturæ liber conſcriptus eſt. Verum non eſt
cur tibi, Princeps Excellentiſſime, hujuſce faculta-
tis præſtantiam, utilitatemque pluribus probem, quę
cum apprimè noveris licet ad omnia Naturæ arcana
rimanda ſis unicè factus; hanc tamen Philoſophiæ
partem potiori quodam jure colendam, tuendamque
ſuſcepiſti, ut jam exemplo tuo ſummo in honore &
apud alios eſſe cœperit. Libuit vero hæc pauca de
Matheſeos dignitate, ac utilitate notaſſe potius ut
meorum ſtudiorum rationem aliquam tibi expone-
rem. Cum enim ad Philoſophiam animum dirige-
rem, cogitare mecum etiam, atque etiam cœpi un-
denam principium capeſſerem. Cumque mihi cogi-
tanti ſæpiùs illud ſapientiæ XI. ſubierit nimirum

Deum

Deum omnia μέτρῳ, καὶ ἀριθμῷ, καὶ σταθμῷ creaſſe, atq; diſpoſuiſſe operæ pretium eſſe exiſtimavi à Mathematicis incipere. Veritus interim Xenocratem increpantẽ Λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας., ac ejus doctorem Platonem Gymnaſii foribus inſcribentem οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Quare ad Mathematicas diſciplinas me contuli. quibus meum ingeniolum pro viribus exercendo, non quidem hiſtorico modo, opellam hanc confeci, quam in publicam lucem non niſi tuo ſub auſpicio, tutelaque prodire volui, ut ſcilicet ei meas haſce in Geometriam exercitationes nuncuparem, cui ſumma omnia citra omnem adulationis ſuſpicionem tribui vere poſſent. Et ſane tanta eſt tui nobilitas ſanguinis, tanta optimarum artium non levis peritia, tantaque tuarum virtutum magnitudo, ut omni laude major ſemper extiteris. Etenim, ſi de tuo gentilitio ſermo eſt, quiſnam percenſebit unquã infinitum prope heroum numerum, quibus perinde ac ſideribus Regia Caracciolorum familia illuſtratur? quis omnia præclare facta tuorum domi, militiæque pro laude, pro Patria, pro Principe, ac pro Religione enarrabit? quis inquam, quæ in ea viſuntur præclariora virtutis monumenta; auguſta nimirum Regum paludamenta, opima Ducum, atque Imperatorum devictis ex hoſtibus ſpolia, Clamydes, Purpuras, Infulas, Faſces, Trabeas, àc coronas omnes perſcribet enarraturus? Fac Principes hujus familiæ enumeres, occurrent jam penè innumeri, quippe qui

ab antiquo Normandorum, aliorumque regno pluribus, & illuſtrioribus titulis floruere; novem ſcilicet Principatibus, Ducatibus vero quindecim, ac ſexdecim Marchionatibus, & titulis ſane majoribus (Comitatus interim, minoreſque Dominationes, cum innumeræ penè ſint omitto) non enim defuere Caraccialorum familiæ Comites Stabuli, Logothetę, AErarii Præfecti, Proreges, & ſummi exercituum Imperatores. quos inter adnumerabis Principes aurei velleris, Hiſpaniæque Magnates plurimi, maximique apud Hiſpanos habitos. nec Eccleſiaſtici Principes huic defuere familiæ, en tibi Albertus Magnus Magiſter Equitum Templariorum, & Riccardus Rhodiorum, en quinque purpurati PP. ac Romanæ Eccleſiæ Cardinales ampliſſimi Berardus, Nicolaus, Corradus, Marinus, & Indicus. en innumerabiles Archiepiſcopi, Epiſcopique, qui quâ vigilantia, quâ pietate egregii omnes fuere, en denique Sardiniæ Reges, quorum omnium præclarè geſta nec mihi opus eſt ut enarrem, cum ad hoc ipſum vel ipſa Fama ſponte ſe offerat. Facere tamen non poſſum quin unum, aut alterum Caracciolorum Heroum, eorumque facta vel ſaltem breviter attingam; Marinum .s. Caracciolum quartũ Bucchianici Marchionem, qui adhuc adoleſcens in Sienenſi bello, nõ niſi victor à dimicatione ſemper rediit. qua de re in Eſtia Equitum Præfectus factus fuit. Deinde adverſus Gallos duorum millium militum Imperator electus,

ctus,

ctus, quo in bello & fortitudine, & celeritate consilii usus maximam sibi, suisque laudem vindicavit. hujus autem singularem erga Religionem pietatem quibus laudibus commendem non invenio. cum enim Calabriæ præesset, illic Lutheranam hæresim exortam præstanti prudentia, pietateque delevit. Nec silentio prætermittam Joannem Antonium, qui ob Samnium ab irruptione Barbarorum strenuè, mirificeque servatum a Philippo II. Principis S. Boni titulo merito fuit decoratus. Nec singularem Marci Antonii erga Ferdinandum II. præstitam fidem. tanta enim fuit præclarissimi hujus viri fides erga Principem Ferdinandum, ut occupato jam Regno a Carolo VIII. comitem se illi in calamitatibus præbere voluerit, bona, amicos, patriam, parentesque derelinquens. O magnum quidem fidei, & rarum pietatis opus! Sed jam hos, sexcentosque alios quâ militari laurea, ac rebus bene gestis, quâ consilio prudentiaque conspicuos derelinquamus, cum in uno Marino quarto S. Boni Principe omnes istorum virtutes simul elucescant; Pietas nimirum erga Patriam, & Religionem, fides erga Principem, prudentia in agendo, in consulendo maturitas, fortitudo in periculis, tantaque etiam Eloquentia ut Roma ipsa Marinum orantem plurimum admirata sit. cum scilicet a Carolo II. Rege Catholico ad Innocentium XI. Pontificem Maximum legatus missus fuit. unde regressus & ob legationem summa cum laude confe-

ctam,

ctam,& ob tot,tantaſque ejus virtutes jure, meritoq;
Hiſpanorum Magnatum honore cohoneſtatus eſt.
Tanto igitur ex Principe natus es Vir meritiſſime
paternarum virtutum,atque honorum merito hæres
futurus. idque tua indoles pene regia, virtutes principe
dignæ,ac ſingularis morum integritas promittunt.
Negabit ne quis unquam Heroicam hanc eſſe
familiam,quando in ea Heroes moriuntur,ac meliori
fato renaſcuntur Heroes? Hoc verè eſt quod de
ramo aureo divinus ille Mincii olor ſplendidè finxit
uno avulſo alterum non deficere aureum, ſimilique
metallo virgam frondeſcere. Verum utinam, Excellentiſſime
Princeps per tuam verecundiam mihi liceret
liberè quid de te uno ſentiam dicere;quantis in
cœlum tollerem laudibus virtutes illas, quæ animũ
exornant tuum. quibus certè facis majorum tuorum
præclare geſtis fidem. Quantum vero in ſuaviorum
muſarum, ſeverioriſque Palladis ſtudio profeceris
omnes cognovimus, qui alacrem ingenii tui felicitatem,&
in carminibus pangendis,& in Mathematicis
diſciplinis perluſtrandis, aliiſque liberalibus artibus
non ſemel demirati ſumus. Quibus incredibile
prope mores tam feliciter conjunxiſti,ut ſupra cæteros
longè præſtantiores mores tui divinum neſcio
quid ſapiant. Verum in te ſingula commendare
neque tua patitur verecundia, neque humanæ vis
eloquentiæ poteſt. adeo enim ex his omnibus Præſtantiſſime
Vir ſplendeſcis, ut præ nimio tuo lu-

mine, veluti ardentissimus sol, te quodammodo nobis occulas, ac mentis aciem evincas. Patiare interim Princeps Excellentiss. ut gloriosum tuum nomen ab invidorum ictibus meum hunc libellum protegat. teq; etiam, atque etiam oro, ut quodcunque sit illud a me hoc munusculum, ut sempiternum mei obsequij, meæque erga te observantiæ monumentum accipias. Da etiam meæ tenuitati veniam si te pro dignitate non laudaverim. eo enim devenit virtus tua, ut illius nulla sit vera, ac germana laus, quam satis laudari non posse. Vale Caracciolorum familiæ Decus. Neapoli Idibus Junij Anni MDCLXXXIX.

BENEVOLO LECTORI.

CUM has noſtras in Geometriam exercitationes in publicum emitto candide Lector, non ea mihi mens eſt, ut aliquid ab eruditis viris aut gloriæ, aut laudis aucuper. Agnoſco enim me nihil magni, nihil eximii præſtitiſſe, ut tantum mihi tribuam. Ea tamen inſtituti mei, & cauſa, & ratio eſt, quod cum à liberalibus diſciplinis abhorruerim nunquam, tum iis potiſſimum ſtudiis ſum delectatus, in quibus, & ſapientia maximè, & veritas elucet. Quæ omnia una in Matheſi ſita eſſe in comperto eſt. Itaque cum mihi quidē ſemper in more poſitum fuit, ea ſcriptis committere, quæ aut mente conceperam, aut verbo protuleram, ut altiores animo radices agerent, & firmius inhærerent: hinc factum eſt, ut amicorum aliquot cum in hos matheſeos tractatus incidiſſent me iterum, atque iterum rogarent, ut Typis mandarem, quæ domi propè ſitu obſita, diu latitarant. Nunquam adducebar ut facerem. Perſuaſerunt tandem meq; invitum, & audacter abnuentem in ſententiam tamen adduxerunt. Neque enim me latebat, Ariſtarchos mihi non defuturos: & quod caput eſt, qui non immerito opus hoc carperent, cum vel ipſa ſuper hac re præclariſſimorum virorum volumina acriter notari, & egregia dicta in pejus diſtrahi videantur. Quod hominū genus ſi quid cæteris inclementius habendum, mihi certè humanius, ut parcius ſeviant, excipiendum eſt. Verum quidquid ideſt Lector benevole, me non pro rei dignitate, ſed pro meis partibus egiſſe arbitreris velim: quas enim in Geometriam exercitationes meo marte meditatus ſum publicę lucis faciam, ut ad ſimilia mihi æqualium animos accendam. Ac ne multis te morer amice Lector, meū opuſculum, ut planè cognitum tibi ſit, ad manus habe fortaſſe tibi quidem probabitur; ſin minus reſpice ætatem, & non me plus juſto dictis inceſſas; utere tamen pro ingenio præſtantioribus. Æqui bonique conſule, & vale.

In prima Epiſtola Sienenſi l. Senenſi. incredibile l. incredibiles. In dictionibus vero græcis characterum græcorum defectu ortographia græca minime eſt ſervata.

EPISTOLA

Nicolai Parthenii Giannattasii ad Authorem Neapolim.

GRatias tibi ago quam maximas; Vir erudite, quod tuas Geometricas præexercitationes ad me recognoſcendas miſeris. illas ego avide, ſummaq; cum animi voluptate luſtravi; dignaſq; duxi, ut publicæ lucis facias, quod quidem illæ meritò tibi depoſcunt; cum ſcitu dignæ, ac perutiles ſint; ſolidaſq; habeant demonſtrationes. ſunt, & ingenii tui argumentum eximium, quod ſanè ex illis ſe maximè fœcundum prodit, quin, & in intelligendo acre, in exponendo verò per quam promptum, ac dexterrimum. id autem mirum ſanè eſt: cum alii matura in ætate ex longo præconceptos partus edant: tu id juvenili in ætate præſtas, & quamquam præcoces ſint ingenii tui partus; ſunt tamen abſoluti, perfectis numeris ſuis. Plura omitto, ne offendam modeſtiam tuam. Vale. Maſſæ Lubrenſis Kal. oct. MDCLXXXVII.

SO-

SONETTO.

DELL'ILLUSTRISS. ET ECCELLENTISS. SIG. DUCA DI CASTEL DI SANGRO

All'Autore.

PALMA, dalle tue carte alti presaggi
Forma la mente mia de tuoi pensieri,
E dalle linee tue scorge i sentieri;
Per quai giungesti al numero de saggi.

E se queste son curve. ecco i messaggi
D'una gloria immortal troppo sinceri;
Perche simboli son degli archi alteri,
Che'l Mondo appresta alla virtù in homaggi.

Ma dal composto d'esse omai son certo,
Che con i punti lor gli ultimi segni
Von dinotar, che tu ponesti al merto.

E se i Circoli osservo. ecco i disegni
Delle corone, e del pregiato serto,
Che freggiar ti dovran Rè de gl'Ingegni.

RIS-

RISPOSTA

Dell' Autore

QUesti, che di me formi, alti presaggi
Signor, non fanno a tuoi giudìci interi;
Che tai non son mie carte, ond'a me speri
Nome, che, qual tu fai, il tempo oltraggi:

Tua virtù, che rivolge in me suoi raggi,
Pinse forse in altrui suoi pregi alteri;
E degnò me d'honor, che tuoi son veri;
Qual, chi pur troppo abbõda in suoi vantaggi.

Ben mio desir mi sprona a l'ermo, ed erto
Giogo; ove chiaro già vestigio segni.
Ma'l cor tarda il sentier dubbio, ed incerto.

Felice te, cui diè securi pegni
Virtù sovrana, e'n breve età fè certo
D'immortal vita, e d'atti eccelsi, e degni.

EMI-

EMINENTISS. SIG.

DOm. Ant. Parrino, e Michele Luigi Mutii, dovendo ſtampare alcune Opere Matematiche; il di cui titolo è *Ioannis Baptiſtę Palmę Neapolitani in Geometriam Exercitationes:* ſupplicano perciò V. E. concedergli la ſolita licenza, e l'averanno à gratia, ut Deus, &c.

P. Nicolaus Giannattaſius Soc. Ieſu, lector, & profeſſor Matheſis in Almo Collegio Soc. Ieſu Neapoli videat, & referat in ſcriptis, hac die 23. Febr. 1688.

Sebaſtianus Periſſius Vic. Gen.

EMINENTISSIME DOMINE.

PErlegi Librum, cui titulus: *Ioannis Baptiſtæ Palmæ Neapolitani in Geometriam Exercitationes;* nihilque in eo animadverti, quod vel Fidei Orthodoxæ, vel moribus obſit; quin potius ingenioſum, politumque opus luce dignum cenſeo, acceptumque Geometris futurum. Neapoli, ex Collegio S. Noſtræ 15. Kal. Aprilis ævæ Chriſtianæ 1688.
E. V.

Addictiſſimus Servus
Nic: Parthenius Giannettaſius Soc: Ieſu.

Attenta relatione ſupraſcripti Reviſoris Imprimatur hac die 24. Aprilis 1688.

Sebaſtianus Periſſius Vic. Gen.

EC-

ECCELLENTISS. SIGNORE.

DOm. Ant. Parrino, e Michele Luigi Mutii, humilmente espongono à V.E. come desiderano stampare un libro, il titolo del quale è *Ioannis Baptistæ Palmę Neapolitani Exercitationes in Geometriam*. Per tanto supplicano V.E. per la solita licenza, e l'averanno à gratia, ut Deus, &c.

Reu. Dot. D. Franciscus Maria d'Asti Cler. Reg. Teatin. videat, & in scriptis referat.

Carrillo Reg. Soria Reg. Miroballus Reg. Iacca Reg.
Provenzalis Reg.

Provisum per S.E. Neap. die 4. Februarii 1688.

Mastellonus.

Ill. Dux Paretæ non interfuit.

EXCELLENTISSIME DOMINE

ORdine Excellentiæ Tuæ perlegi Opus, cui titulus. *Ioannis Baptistæ Palmę Neapolitani in Geometriam Exercitationes*; cumque in eo nihil Regiæ Iurisdictioni, politicoque regimini absonum invenerim, idcirco Typis committendum autumo. Neapoli in AEdibus Sanctæ Mariæ Angelorum duodecimo Kal. Aprilis 1688.

Excellentiæ Tuæ

Addictissimus Servus
D. Franciscus Maria de Aste ex Clericis Regul.
Regii Collateralis Theologus.

Visa supradicta relatione imprimatur, & in publicatione servetur Reg. Pragm.

Carrillo Reg. Moles Reg. Miroballus Reg. Iacca Reg.

Provisum per S.E. Neap. die 1. *Aprilis* 1688.

Mastellonus.

Ill. Marchio Crispani, & Spect. Reg. Provenzalis non interfuerunt.

ERRATA.

PAg. 17. ver. 28. & pag. 18. ver. 27. secuvimus l. secuimusf Pag. 21. ver. 20. 22. 23. quintæs l. quintæ. Pag. 23. ver. 3. & 4. uteriq; l. utriq; & ver. 30. recti l. recti æqualis. Pag. 69. ver. 16. B C l. A C. Pag. 88. ver. 1. Thorematis l. Theorematis, & ver. 6. Scolium l. Scholium. & ver. 7. duobus l. duabus. Pag. 101. ver. 26. esse A B l. A B esse.

PRO-



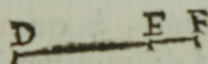
PROBLEMA I.

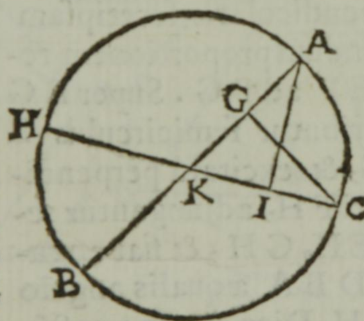
PROPOSITIO I.

Dato circulo, & in ejus circumferentiâ ſignato puncto, invenire diametrum, in quam cum cadet normalis à puncto dato ſecet diametrum inventam in datâ proportione.



IN circumferentiâ circuli A B C ſignatum ſit punctũ A. Oportet igitur invenire diametrum, in quã cum cadet normalis à dato puncto A, ſecet ipſam in datâ proportione rectæ D E ad E F. A' puncto dato A ducatur diameter A B, quæ ſecetur in G, ita ut ſit B G ad G A, ut D E ad E F, & erectâ ſuper A B perpendiculari G C, ducatur diameter C H. Dico rectam C H eſse diametrum quæſitam. Cadat ergo A I normaliter ad C H. Quoniam igitur angulus A I K trianguli A K I æqualis eſt angulo C G K

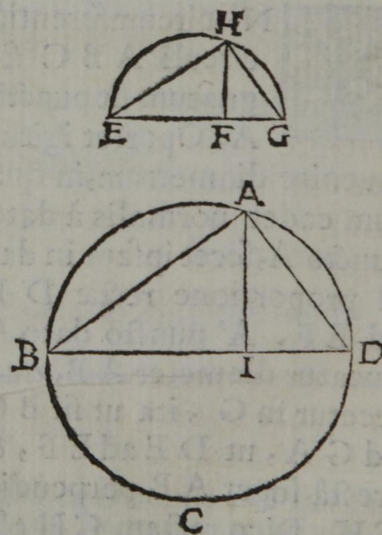




trianguli C K G, ambo enim sunt recti, & angulus C K A communis, latus vero C K æquale lateri A K, cum sint ejusdem circuli semidiametri; erit latus K I trianguli A K I æquale lateri G K trianguli C G K. Additis igitur semidiametris B K, H K; erit tota recta B G toti H I æqualis: igitur reliquæ G A, I C inter se æquales erunt; Adeoque erit B G ad H I, ut G A ad I C; igitur vicissim erit H I ad I C, ut B G ad G A; hoc est D E ad E F. Inventa est igitur diameter in quam, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. II. PROPOS. II.

In circumferentiâ dati circuli invenire punctum, à quo quæ ducitur ad diametrum normalis, secet ipsam diametrum in datâ proportione.



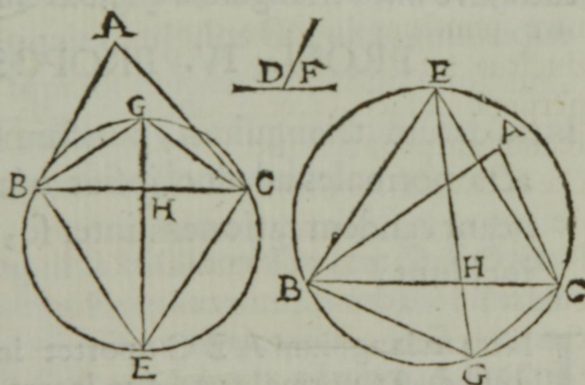
IN circumferentiâ circuli A B C D oportet invenire punctum, à quo quæ ducitur ad diametrum B D perpendicularis, secet ipsam secundum proportionem rectæ E F ad F G. Super E G describatur semicirculus E H G, & excitatâ perpendiculari F H, adjungantur rectæ E H, G H, & fiat angulus D B A æqualis angulo G E H. Dico A esse punctũ, quod invenire oportebat. Demittatur igitur A I ad diametrum B D perpendicularis, & jungatur D A. Quoniam ergo triangula E F H, B I A inter se sunt æquiangula,

la; erit latus E F ad F H, ut B I ad I A. Eâdem ratione, erit H F ad F G, ut A I ad I D. Quocirca cum ſit E F ad F H, ut B I ad I A, & F H ad F G, ut I A ad I D; erit ex æqualitate E F ad F G, ut B I ad I D. Diviſa eſt igitur diameter B D circuli A B C D à perpendiculari A I in datâ ratione rectæ E F ad F G. In circumferentiâ igitur dati circuli inventum eſt punctum, à quo quæ, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato triangulo, invenire punctum ſive extra, ſive intra triangulum, à quo, actæ duæ rectæ lineæ ad duo extrema puncta lateris dati trianguli, teneant eandem rationem inter ſe, ac reliqua latera, contineantque angulum dato angulo æqualem.

Sit datũ triangulum A B C. Oportet igitur invenire pũctum ſive extra, ut in pr. fig., ſive intra datum triangulũ A B C, ut in ſecun. à quo, ductæ duæ rectæ lineæ ad duo extrema puncta B, & C lateris B C, teneant inter ſe rationem eandem, ac reliqua latera A B, A C, contineantque angulum dato angulo D æqualem. Super rectâ B C verſus quaſvis partes deſcribatur ſegmẽtum B E C, quod capiat angulum æqualem



lem angulo, quem angulus D è duobus rectis relinquit; hoc est angulo F, & segmenti B E C circulus B E C G compleatur. Diviso deinde segmento B E C bifariam in E, & recta B C divisâ in H, ita, ut sit B H ad H C, ut B A ad A C, adjungatur E H, quæ producatur in G. Dico G esse punctum quod quæritur. Ducantur modo G B, G C. Quoniam igitur arcus B E æqualis est arcui E C; erit angulus B G E angulo E G C æqualis. Divisus est igitur, angulus B G C bifariam à rectâ G H; adeoq; erit, ut B H ad H C, ita B G ad G C. Sed ut B H ad H C, ita est B A ad A C; igitur ut B A ad A C, ita erit B G ad G C. Rectæ igitur B G, G C eandem tenent rationem, ac latera B A, A C. Quod autem contineant angulum B G C æqualem angulo D patet. Nam ductis B E, C E: erunt anguli B G C, B E C duobus rectis æquales, adeoque æquales angulis D, F; Atqui angulus B E C angulo F est æqualis; igitur angulus B G C angulo dato D æqualis erit. Dato igitur triangulo, inventum est punctum sive extra, sive intra triangulũ, à quo, &c. Quod erat faciendũ.

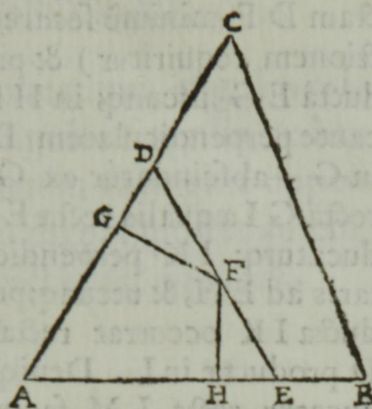
PROBL. IV. PROPOS. IV.

Intra datum triangulum, punctum invenire, à quo actæ normales ad duo ipsius trianguli latera, teneant eandem rationem inter se, ac latera in quæ incidunt.

INtra triangulum A B C oportet invenire punctum, à quo ductæ normales ad duo latera ipsius, teneant rationem eandem inter se, ac latera in quæ cadunt. Ex rectis A B, A C abscindantur A D, A E inter se æquales, & adjuncta D E secetur in F, ita ut sit D F ad F E, ut A C ad A B. Dico F esse punctum quæsitum. Ducantur igitur F G, F H perpendiculares ad A B, A C. Quoniam

igi-

igitur angulus A D E æqualis est angulo A E D, & angulus F G D angulo F H E æqualis; erit reliquus angulus G F D trianguli G D F reliquo angulo H F E triãguli F E H æqualis. AEquiãgula igitur sũt triãgula G D F, F E H; ac propterea erit G F ad F D, ut H F ad F E. Igitur permutãdo erit G F ad F H, ut D F ad F E. Sed ut D F ad F E, ita se habet A C ad A B: igitur erit perpẽdicularis F G ad perpendicularem F H, ut A C ad A B. Itaque intra datum triangulum inventum est punctum, à quo ductæ, &c. Quod erat faciendum.



PROBL. V. PROPOS. V.

Triangulum invenire, quod habeat angulos tribus datis angulis æquales singulos singulis, unumque laterum, quod superet perpendicularem ejusdem trianguli excessu dato. Oportet autem tres datos angulos duobus rectis esse æquales.

SInt tres dati anguli A, B, C, excessus vero D E. Oportet itaq; invenire triangulum, cujus anguli æquales sint tribus angulis A, B, C singuli singulis, excessus vero, quo unum trianguli laterum superat perpendicularem ejusdem, sit recta D E. A'puncto D, vel à puncto E dati excessus D E erigatur perpendicularis D F, utcunq; producta in F, & ad alterum punctum E constituatur angulus D E G æqualis angulo acuto A (non enim recto vel obtuso constituetur æqualis, nam secus recta E G re-

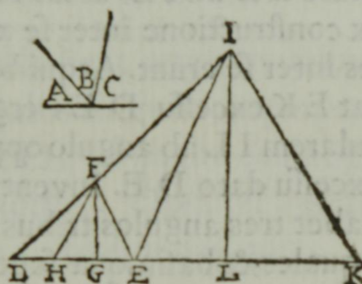
ctam

ctam D F minimè ſecaret, quod cœteroqui ad conſtructionem requiritur) & productâ E G utcunq; in H ſecante perpendicularem D F in G, abſcindatur ex G F recta G I æqualis rectæ E G, ducaturq; I K perpendicularis ad E H, & utcunq; producta I K occurrat rectæ E D productæ in L. Denique ducatur recta L M faciens cum rectâ E L angulum E L M æqualem angulo B, & occurrat rectæ E H in M. Dico triangulum L E M eſſe de quo quæritur. Quoniam igitur angulus L E M æqualis eſt angulo A, & angulus E L M æqualis angulo B: erit reliquus angulus L M E reliquo angulo C æqualis. Anguli igitur triãguli L E M æquales ſunt datis angulis A, B, C ſinguli ſingulis. Et quia ãgulus E G D trianguli G E D æqualis eſt angulo I G K triãguli K G I, & angulus E D G angulo I K G æqualis, latus vero E G lateri G I æquale; erit angulus D E G angulo G I K æqualis, & latus D G lateri G K æquale; Adeoq; tota D I æqualis erit toti E K. Quapropter cum anguli L E K, E K L trianguli K E L æquales ſint angulis L I D, I D L trianguli D I L uterq; utriq;, latus vero E K lateri D I æquale; Erunt rectæ L D, L K inter ſe æquales: Sed latus L E trianguli L E M ſuperat rectam L D dato exceſſu D E; igitur ſuperabit etiam perpendicularem L K dato exceſſu D E. Triangulum ergo L E M tres habet angulos tribus datis angulis A, B, C æquales ſingulos ſingulis, & latus L E, quod ſuperat perpendicularem L K ejuſdem trianguli L E M dato exceſſu D E. Inventum eſt igitur triangulum, &c. Quod erat faciendum.

Trian-

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Triangulum invenire, quod habeat tres angulos tribus datis angulis æquales ſingulos ſingulis, & baſin, quæ ſuperet perpendicularem ab angulo oppoſito ad ipſam ductam exceſſu dato. Oportet autem tres datos angulos duobus rectis eſſe æquales.



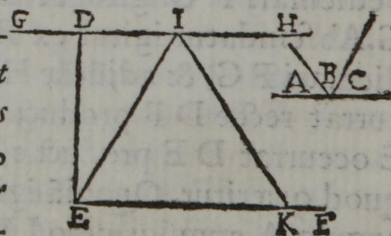
OPortet invenire triangulum, quod habeat tres angulos æquales ãgulis A,B,C ſingulos ſingulis, & baſin, quæ ſuperet perpẽdicularem ab angulo oppoſito ad ipſam ductã exceſſu dato D E. Conſtituãtur ad extrema puncta D,& E dati exceſſus D E ãguli F D E, F E D, quorũ unus, nẽpe F D E æqualis ſit ãgulo minori A,(ſi ãguli A,B,C nõ fuerint inter ſe æquales) ãgulus vero F E D cuivis reliquorũ; hoc eſt ãgulo B æqualis,& rectæ D F, E F coeant in pũcto F, demittaturque perpẽdicularis F G. Et quia ãgulus F D E minor eſt ex cõſtructione ãgulo D F E, erit recta D E major rectâ F E: ſed F E major eſt perpẽdiculari F G. igitur recta D E multo major erit rectâ F G. Abſcindatur igitur ex E D recta E H æqualis perpendiculari F G, & adjũctæ H F parallela agatur E I, quæ occurrat rectæ D F productæ in I, & I K parallela rectæ F E occurrat D E productæ in K. Dico triãgulũ I D K eſſe quod quæritur. Quoniã igitur angulus I D K æqualis eſt angulo A, angulus vero I K D æqualis angulo F E D; hoc eſt angulo B; erit reliquus angulus D I K reliquo angulo C æqualis. Anguli igitur trianguli I D K æquales ſunt datis angulis A,B,C ſinguli ſingulis. Quod autem baſis

D K

D K ſuperet perpendicularem I L exceſſu dato D E, ita demonſtratur. Anguli K E I, I K E trianguli I E K æquales ſunt angulis E H F, F E H trianguli H E F uterque utrique: igitur reliquus angulus E I K reliquo angulo H F E erit æqualis. ÆEquiangula ſunt igitur triangula H E F, I E K; Adeoque erit K E ad E I, ut E H ad H F. Et rurſus quia triãgula I E L, F H G etiã ſunt æquiãgula; erit E I ad I L, ut H F ad F G. Quare cum ſit K E ad E I, ut E H ad H F, & E I ad I L, ut H F ad F G; erit ex æqualitate K E ad I L, ut E H ad F G: Sunt autem E H, F G ex conſtructione inter ſe æquales. Igitur K E, I L æquales inter ſe erunt. Atqui baſis D K trianguli I D K ſuperat E K exceſſu D E; ergo ſuperabit etiam perpendicularem I L ab angulo oppoſito D I K ad ipſam ductam exceſſu dato D E. Inventum eſt igitur triangulum, quod habet tres angulos tribus datis angulis ſingulos ſingulis æquales, & baſin, quæ ſuperat, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Tribus datis angulis, & altitudine conſtituere triangulum. Oportet autem, ut tres anguli dati duobus rectis ſint æquales.

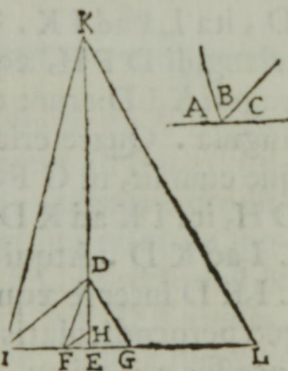


Datis angulis A, B, C, & altitudine D E. Conſtituendum eſt triangulum, quod habeat tres angulos tribus datis angulis A, B, C æquales ſingulos ſingulis, & altitudinem D E. Erigatur recta E F ad D E perpendicularis, cui per punctum D parallela agatur G H. Et conſtituto ad punctum E angulo F E I æquali angulo A, occurrat recta E I rectæ G H in I, & I K, faciens

ciens cum recta E I angulum E I K æqualem angulo B, occurrat E F in K. Dico factum esse, quod oportebat. Nam angulus K E I æqualis est angulo A, & angulus E I K angulo B æqualis; reliquus ergo angulus I K E reliquo angulo C æqualis erit. Triangulum igitur E K I habet angulos æquales datis angulis A, B, C singulos singulis, & datam altitudinem E D, ut perspicuum est. Factum est igitur, quod erat faciendum.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Triangulum invenire, quod habeat angulos tribus datis angulis æquales singulos singulis, & perpendicularem ab angulo verticali ad basin ductam, quæ superet basin dato excessu. Oportet autem ut tres anguli dati duobus rectis sint æquales.



SInt dati anguli A, B, C, excessus vero D E. Inveniendum est triãgulum, quod habeat angulos æquales angulis, A, B, C, singulos singulis, & perpendicularem ab angulo verticali ad basin ductã, quæ superet basin excessu dato D E. Per expositum lemma, constituatur triangulum D F G, quod habeat altitudinem D E, & angulos æquales angulis A, B, C, singulos singulis; hoc est angulum D F G æqualem angulo A, & angulum D G F angulo B, angulum vero verticalem F D G angulo minimo C æqualem. Deinde ex altitudine, seu perpẽdiculari D E sũptâ D H æquali basi F G, (quod D E major sit quam F G supponitur, nam secus anguli dati A, B, C non forent anguli, ex quibus quodlibet

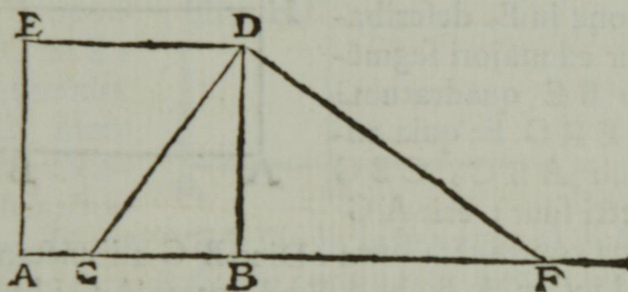
triangulum constitutum haberet perpendicularem a minimo angulo ad basin ductam majorem basi, ut propositio requirit) ducatur D I parallela adjunctæ H F, quæ occurrat G F productæ in I, & recta I K parallela rectæ F D occurrat perpendiculari E D productæ in K. Ac demum K L, æquedistans rectæ D G, occurrat I G productæ in L. Dico triangulum K I L, esse de quo quæritur. Quoniam igitur anguli K I L, K L I, trianguli I L K æquales sunt angulis D F G, D G F, trianguli F G D, uterque utrique: erunt triangula I L K, F G D inter se æquiangula. Sunt autem anguli, trianguli F G D, æquales angulis A, B, C, singuli singulis; ergo anguli, trianguli I L K, eisdem angulis A, B, C, singuli singulis, æquales erunt. Triangulum igitur I L K habet angulos æquales angulis datis A, B, C, singulos singulis. Quod autem perpendicularis K E superet basim I L excessu dato D E, sic probatur. Triangula I L K, F G D, ut modo demonstravimus, sunt inter se æquiangula. Igitur erit ut G F ad F D, ita L I ad I K. Et rursus quia anguli F D H, F H D, trianguli D F H, æquales sunt angulis I K D, I D K, trianguli K I D: erunt triangula D F H, K I D inter se æquiangula. Quare erit ut F D ad D H, ita I K ad K D. Itaque cum sit, ut G F ad F D, ita L I ad I K, & ut F D ad D H, ita I K ad K D: erit ex æquo ut F G ad D H, ita L I ad K D. Atqui F G, D H sunt inter se æquales: ergo L I, K D inter se æquales erunt. Est autem D E excessus, quo perpendicularis K E superat rectam K D: igitur D E excessus erit etiam, quo eadem perpendicularis K E superat basim I L. Inventum est igitur triangulum, quod habet angulos tribus datis angulis æquales, singulos singulis, & perpendicularem, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Ad datam rectam lineam, sectam utcunque, rectam lineam adjungere, ita ut rectangulum comprehensum ab adjunctâ, & ab uno segmentorum ipsius datæ, æquale sit ei, quod a datâ rectâ describitur, quadrato.

AD datam rectam lineam A B, utcunque sectam in C, sit adjungenda recta linea, ita ut rectangulum cōprehensum ab adjunctâ, & ab uno segmentorum C B, datæ rectæ A B, æquale sit ei, quod a

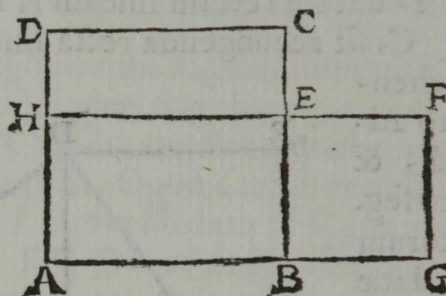


datâ A B describitur, quadrato. Describatur ex A B quadratum A B D E, & ductâ C D, erigatur ad ipsam perpendicularis D F, donec occurrat A B, utcunque productæ, in F. Dico rectam B F, esse lineam imperatam. Quoniam igitur angulus F D C, trianguli F C D, rectus est, & D B perpendicularis est ab basim F C; erit D B media proportionalis inter segmenta C B, B F. Quare quadratum ex B D æquale erit rectangulo C B F; hoc est quadratum ex A B æquale erit rectangulo contento sub adjunctâ F B, & sub uno segmentorū C B, datæ rectæ A B. Ad datam igitur rectam lineam, utcunque sectam, adjuncta est recta linea, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere, ita ut ipsa data sit media proportionalis inter totam, & adjunctam.

Sit recta A B ita augenda, ut ipsa sit media proportionalis inter totam, & adjunctam. Ex A B describatur quadratum A B C D. Et sectâ B C extremâ, ac mediâ ratione in E, describatur ex majori segmẽto B E quadratum B E F G. Et quia anguli A B C, C B G recti sunt; erit A G una continuata linea. Dico B G, adjunctam ad A B, esse ad ipsam A B, ut A B ad totam A G; hoc est A B mediam esse proportionalẽ inter totã A G, & adjũctam B G. Producatur F E in H. Quoniam igitur B C secta est extremâ, ac mediâ ratione in E: erit quadratum B F a majori segmento B E descriptum æquale rectangulo contẽto sub totâ B C, & sub minori segmento E C; hoc est rectangulo D E. Addito igitur communi rectangulo A E; erit quadratum A C rectangulo A F æquale. Tres igitur rectæ lineæ A G, A B, B G erunt continuè proportionales, quarum data A B est media inter totam A G, & adjunctam B G. Data igitur recta linea, ita aucta est, ut ipsa, &c. Quod facere oportebat.

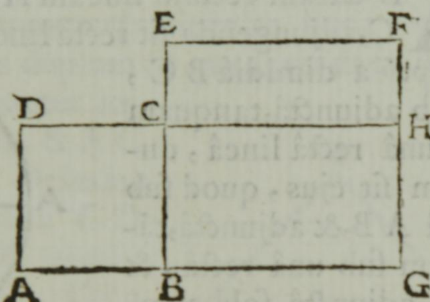


PRO-

PROBL. X. PROPOS. X.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere, ita ut adjuncta sit media proportionalis inter totam, & datam.

AD datam rectam lineam A B adjungenda est recta linea, quæ media proportionalis sit inter totam, & datam A B. Ex A B describatur quadratum A B C D. Et, per præcedẽtem propos. productâ B C in E, ita ut B C sit media proportionalis inter totam B E, & adjunctam C E, describatur ex B E quadratum B E F G. Et quia anguli A B E, E B G recti sunt; erit A G una continuata linea. Dico B G, adjunctam ad A B, mediam esse proportionalem inter totam A G, & datam A B. Producatur D C in H. Quoniam igitur B C media proportionalis est inter totã B E, & adjunctam C E; erit quadratum ex B C; hoc est quadratum B D æquale rectangulo B E C; hoc est rectangulo C F; Quare additô communi rectangulo B H; erit quadratum B F æquale rectangulo A H; adeoque tres rectæ lineæ A G, B G, A B continuè proportionales erunt, quarum adjuncta B G media proportionalis est inter totam A G, & datam A B. Ad datam igitur rectam lineam adjuncta est recta linea, ita ut, &c. Quod faciendum erat.

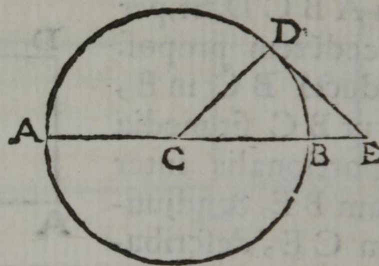


PRO-

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere, ita ut quadratum descriptum ab adjunctâ, & a dimidiâ ipsius datæ, tanquam ab unâ rectâ lineâ, duplum sit ejus, quod a totâ cum adjunctâ, & ab adjunctâ solâ comprehenditur, rectanguli.

AD datam rectam lineam A B, bifariam divisam in C, adjungenda sit recta linea, ita ut quadratum descriptũ a dimidiâ B C, & ab adjunctâ, tanquam ab unâ rectâ lineâ, duplum sit ejus, quod sub totâ A B, & adjunctâ, tãquam sub unâ rectâ, & sub adjunctâ solâ comprehenditur, rectanguli.



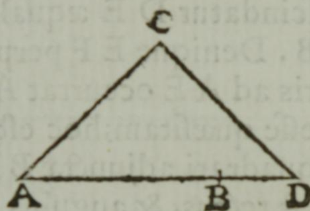
Describatur circulus A B D, cujus diameter sit A B, & constitutô ad centrum C angulô B C D semirectô, excitetur D E perpendicularis ad C D, donec occurrat A B, utcunque productæ, in E. Dico B E, esse rectam adjungendam ad datam A B. Quoniam igitur angulus E D C rectus est, & angulus D C E semirectus; erit etiam angulus D E C semirectus. Quare latera C D, E D, ac proinde ipsarum quadrata inter se æqualia erunt; Est autem quadratum C E æquale quadratis C D, E D: igitur quadratum C E duplum erit unius ipsorum; hoc est quadrati E D; Atqui quadratum E D æquale est rectangulo A E B(nam E D perpendicularis est ad semidiametrum C D; Adeoque circulum A B D tangens est); ergo quadratum C E descriptum a dimidiâ C B, datæ rectæ A B, & ab adjunctâ B E, tanquam ab unâ rectâ, duplum est rectan-

ctanguli A E B, contenti sub datâ A B, & adjunctâ B E, & sub adjunctâ solâ B E. Ad datam igitur rectam lineam adjuncta est recta linea, ita ut, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROPOS. XII.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere, ita ut quadratum totius duplum sit quadrati datæ.

AD rectam A B adjungenda sit recta linea, ita ut quadratum totius duplum sit quadrati datæ A B. Ad punctum A constituatur angulus B A C semirectus, & A C æqualis sit rectæ A B. Deinde à puncto C erigatur recta C D perpendicularis ad A C occurrens A B productæ in D. Dico rectam B D, adjunctam ad datam A B, esse quæsitam. Quoniam igitur angulus C A D semirectus est, & angulus A C D rectus: erit reliquus angulus C D A etiam semirectus: Adeoque æqualis angulo C A D. Quare latera C A, C D æqualia inter se erunt. Cum autem quadratum A D sit æquale quadratis D C, A C, quæ sunt inter se æqualia: erit quadratum A D duplum quadrati A C; Sed quadratum A C æquale est quadrato A B. Ergo quadratum A D quadrati A B duplum etiam erit. Ad datam igitur rectam lineam rectam lineam adjunximus, ita ut, &c. Quod erat faciendum.

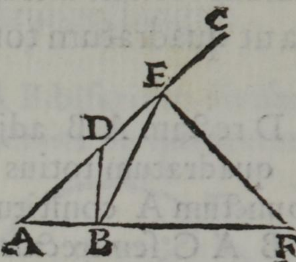


PRO-

PROBL. XIII. PROPOS. XIII.

Ad datam rectam lineam rectam lineam adjungere, ita ut quadratũ totius duplũ sit quadrati adjunctæ.

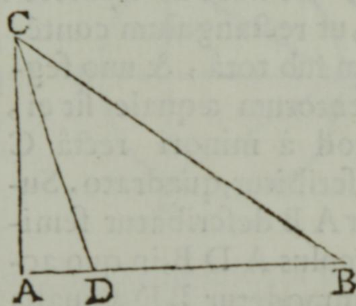
AD datam rectam A B oportet adjungere rectam lineam, ita ut quadratum totius duplum sit quadrati adjunctæ. Ad punctum A constituatur angulus B A C semirectus, & A C sit producta utcunque in C. Deinde B D perpendicularis ad A B occurrat A C in D, & ex D C abscindatur D E æqualis rectæ D B. Denique E F perpendicularis ad A E occurrat A B productæ in F. Dico rectam B F, esse quæsitam; hoc est quadratum totius A F duplum esse quadrati adjunctæ B F. Quoniam igitur angulus A E F est rectus, & angulus E A F semirectus; erit reliquus angulus E F A etiam semirectus. Ideoque æqualis angulo E A F. Ac propterea latera A E, F E inter se æqualia erunt. Quare cum quadratum A F æquale sit quadratis A E, F E, quæ sunt inter se æqualia, ob æqualitatem laterum A E, F E; erit idẽ quadratum A F duplum unius ipsorum; hoc est quadrati E F. Cum autem latera D B, D E sint inter se æqualia: erunt anguli D B E, D E B inter se æquales. Quapropter ablatis ipsis ab angulis rectis D E F, D B F; erunt reliqui anguli B E F, E B F inter se æquales. Et ob id rectæ E F, B F; hoc est ipsarum quadrata inter se æqualia erunt. Ostendimus autem quadratum A F duplum esse quadrati E F. Ergo igitur idem quadratum A F duplum etiam erit quadrati adjũctæ B F. Ad datam igitur rectam lineam rectam lineam adjunximus, ita ut, &c. Quod facere oportebat.



PROBL. XIV. PROPOS. XIV.

Duarum rectarum inæqualium majorem, ita secare, ut quadratum unius segmenti æquale sit quadratis, quæ fiunt alterum à reliquo segmento, alterum vero à minori datâ rectâ lineâ.

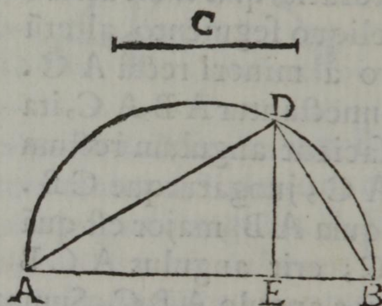
SInt rectæ A B, A C inter se inæquales, quarum major sit A B. Oportet A B, ita secare, ut quadratum unius segmenti æquale sit quadratis, quæ fiunt alterũ à reliquo segmento, alterũ vero à minori rectâ A C. Connectantur A B, A C, ita ut faciant angulum rectum B A C, jungaturque C B. Et quia A B major est quã A C; erit angulus A C B major angulo A B C. Sumatur igitur ex majori angulo A C B angulus B C D æqualis angulo A B C, & C D secet A B in D. Dico rectam A B sectam esse in D, ita ut quadratum unius segmẽti D B æquale sit quadratis, quæ fiunt alterum à reliquo segmento A D, alterum vero à minori rectâ A C. Quoniam igitur anguli D C B, D B C inter se sunt æquales; erunt rectæ C D, D B æquales inter se; Quare quadratum ex D B quadrato ex C D æquale erit; Sed eidem quadrato ex C D æqualia sunt quadrata C A, A D (angulus enim C A D rectus est) ergo quadratum D B æquale erit quadratis A D, A C. Duarum igitur rectarum inæqualium majorem, ita secuimus, ut quadratum, &c. Quod facere oportebat.



PROBL. XV. PROPOS. XV.

Duarum rectarum inæqualium majorem, ita secare, ut rectangulum comprehensum sub totâ, & uno segmentorum, æquale sit ei, quod à minori datâ rectá describitur, quadrato.

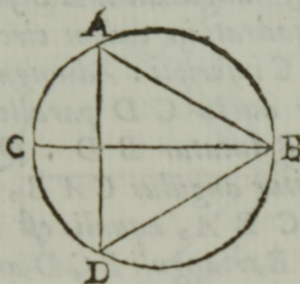
SInt rectæ A B, & C inæquales inter se, quarum major sit A B. Oportet igitur majorem A B, ita secare, ut rectangulum contẽtum sub totâ, & uno segmentorum æquale sit ei, quod à minori rectâ C describitur, quadrato. Super A B describatur semicirculus A D B, in quo accommodetur B D æqualis rectæ C (potest nimirũ accommodari, nam diameter A B major est quam C), & à puncto D demittatur perpẽdicularis D E. Dico rectã A B, sectã esse in E, ita ut rectangulum contentum sub totâ A B, & uno segmentorum B E æquale sit quadrato, minoris rectæ C. Ducatur D A. Quoniam igitur ab angulo recto A D B, trianguli A B D, ducta est ad basim A B perpendicularis D E; erunt triangula A B D, E B D inter se similia. Quapropter erit A B ad B D, ut B D ad B E. Media proportionalis est igitur recta B D; hoc est C, inter A B, & B E; Ideoque rectangulum A B E, quadrato C erit æquale. Duarum igitur rectarum inæqualium majorem, ita secuimus, ut, &c. Quod efficiendum erat.



LEMMA I.

Recta linea in circulo accommodata, faciens cum diametro angulum æqualem tertiæ parti anguli recti; erit latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti.

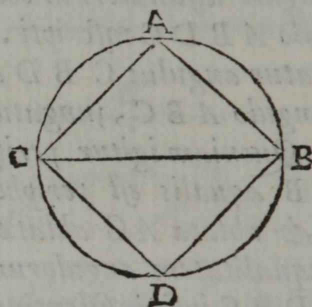
RECTA A B, in circulo A B D C accommodata, faciat cũ diametro C B angulum A B C æqualem tertiæ parti unius recti. Dico A B, esse latus trianguli æquilateri in eodem circulo A B D C inscripti. Constituatur angulus C B D æqualis angulo A B C, jungaturq; A D. Quoniam igitur peripheria C A B æqualis est peripheriæ C D B, & ablata A C ablatæ D C, ob æqualitatem angulorum A B C, D B C ipsis insistentium; erit reliqua peripheria A B reliquæ D B æqualis: adeoq; rectæ A B, D B ipsas subtendentes inter se æquales erunt. Cum autem angulus C B D æqualis sit angulo A B C, qui tertia pars est unius recti; erit ipse tertia pars etiam unius recti; Igitur totus angulus A B D duæ tertiæ partes est unius recti; hoc est tertia pars duorum rectorum: ergo reliqui anguli B A D, B D A, trianguli D A B, erunt reliquæ duæ tertiæ partes duorum rectorum, qui cum sint inter se æquales, ob æqualitatem laterum A B, B D, ut modo demonstravimus; erit quisque ipsorum tertia pars duorum rectorum; Itaque anguli A B D, B D A, D A B, trianguli A B D, æquales inter se sunt; AEquiangulum est igitur triangulum A B D: Ac propterea æquilaterum. Recta igitur A E, quæ facit cũ diametro C B, circuli A B D C, angulum A B C æqualem tertiæ parti unius recti, est latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscripti. Quod erat demonstrandum.



LEMMA II.

Recta linea in circulo accommodata, faciẽs cum diametro ejusdem angulum semirectum, latus est quadrati in eodem circulo inscripti.

Faciat recta A B cum diametro C B, circuli A B D C, angulum A B C semirectum. Dico A B latus esse quadrati in eodem circulo A B D C inscripti. Adjungatur A C, & ducta C D parallela rectæ A B ducatur B D. Quoniam igitur angulus C A B, trianguli C B A, æqualis est angulo C D B, trianguli B C D, ambo enim sunt recti, & angulus A B C angulo D C B æqualis, latus vero C B commune; erunt latera C D, D B lateribus C A, A B, utrumq; utrique, æqualia; Atqui latera C A, A B inter se sunt æqualia, ob æqualitatem angulorum A C B, A B C; igitur latera C D, D B inter se æqualia erunt. Quadrilaterum igitur A C D B habet omnia latera inter se æqualia; Sed habet etiam omnes angulos rectos (nam C D parallela est rectæ A B, & angulus C A B est rectus: igitur angulus A C D rectus etiam erit; Est autem angulus C D B etiam rectus; ergo reliquus A B D rectus erit): Ergo igitur quadratum est quadrilaterum A C D B. Recta igitur A B est latus quadrati in circulo A B D C inscripti. Quod erat demonstrandum.

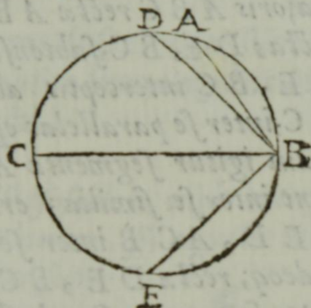


LEM-

LEMMA III.

Recta linea in circulo accommodata, faciens cum diametro ejusdem angulum æqualem tribus quintis unius recti, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti.

Recta A B faciat cum diametro C B, circuli B A C E, angulum A B C æqualem tribus quintis unius recti. Dico rectam A B, esse latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo B A C E inscripti. Si autem dicatur A B non esse latus pentagoni. Sit illud si fieri potest D B. Aptetur in circulo B A C E recta B E æqualis rectæ D B. Quoniam igitur arcus C A B æqualis est arcui C E B, & ablatus arcus D B ablato E B, ob æqualitatem rectarum B D, B E; erit reliquus arcus D C reliquo arcui C E æqualis; Adeoq; anguli D B C, E B C ipsis insistentes æquales inter se erunt. Divisus est igitur bifariam angulus D B E, qui cum sit, per coroll. prop. 11. lib. 4. elem. sex quintæ unius recti; erit angulus D B C, qui pars dimidia est anguli D B E, tres quintæ unius recti; sed angulus A B C etiam ponitur tres quintæ unius recti; igitur anguli D B C, A B C inter se æquales erunt, pars toti. Quod est absurdum. Non igitur D B; sed recta A B est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A B C E inscripti. Quod demonstrandum erat.

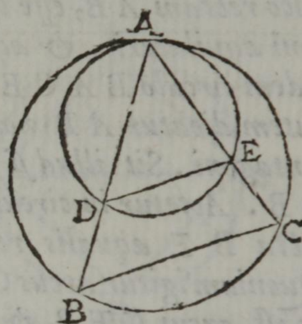




LEMMA IV.

Si duo circuli ſe interius contingant, & à puncto contactus duæ rectæ in majoris circuli peripheriam cadant; rectæ lineæ, ſubtenſæ arcubus ab ipſis rectis interceptis, parallelæ inter ſe erunt.

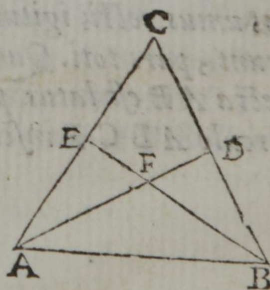
Circuli A B C, A D E ſe mutuo interius tangant in puncto A, à quo cadant in peripheriam B C, circuli majoris A B C rectæ A B, A C. Dico rectas D E, B C, ſubtenſas arcubus D E, B C interceptis ab ipſis A B; A C, inter ſe parallelas eſſe. Quoniam igitur ſegmenta A B, A D ſunt inter ſe ſimilia; erunt anguli A E D, A C B inter ſe æquales: Adeoq; rectæ D E, B C parallelæ inter ſe erunt. Quod oſtendendum erat.



LEMMA V.

Super datâ rectâ lineâ triangulum iſoſceles cõſtituere, cujus uterque eorum, qui ad baſim ſunt angulorum, pars tertia ſit unius recti.

Super recta A B conſtituendum eſt triangulum iſoſceles, cujus uterque eorũ, qui ad baſim ſunt angulorum, pars tertia ſit anguli recti. Conſtituatur ſuper A B triangulum æquilaterum A B C, & anguli C A B, C B A dividantur bifariam à rectis A D, B E ſe mutuo ſecantibus in F. Dico triangulum F A B eſſe quæſitum. Quoniam igitur anguli C A B, C B A inter ſe ſunt

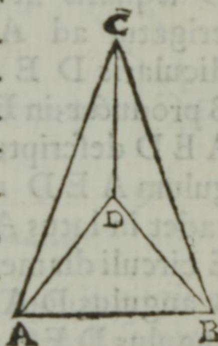


sunt æquales; erunt ipsorũ dimidij, nẽpè anguli F A B, F B A etiam inter se æquales; Isosceles est igitur triangulum F A B; Sunt autem uterque anguli C A B, C B A duæ tertiæ partes unius recti; igitur uterq; anguli F A B, F B A pars tertia erit unius recti. Triangulum igitur F A B isosceles est, & habet utrumq; eorum, qui ad basim sunt angulorum, &c. Quod faciendum erat.

LEMMA VI.

Super datâ rectâ lineâ triangulum isosceles constituere, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt angulorum, æqualis sit tribus quintis unius recti.

Super A B cõstituẽdũ est triãgulũ isosceles, cujus uterq; eorum, qui ad basim sunt angulorum, sit æqualis tribus quintis unius recti. Constituatur super A B triangulum isosceles A B C, cujus uterque angulus C A B, C B A duplus sit reliqui A C B. Et ducta C D, quæ dividat angulum A C B bifariã, sumantur ex angulis C A B, C B A anguli C A D, C B D æquales angulis A C D, B C D, uterque utrique, & rectæ A D, B D sibi occurrant in D. Dico triangulum A B D esse imperatum. Quoniam igitur, per coroll. prop. 10. lib. 4. Elem. angulus A C B duæ quintæ est unius recti; erit uterque angulus C A D, C B D, utpote qui æquales sunt angulis, A C D, B C D, pars quinta unius recti; Est autem, per idem coroll. quilibet angulorum C A B, C B A quatuor quintæ unius recti; igitur si ex ipsis auferantur anguli C A D, C B D; Erit tam angulus D A B, quam angulus D B A tribus quintis unius recti. Factum est igitur, quod faciendum erat.



PRO-

PROBL. XVI. PROPOS. XVI.

Dato exceſſu, quo diameter circuli ſuperat latus triãguli æquilateri in eodem circulo inſcripti, invenire circulum.

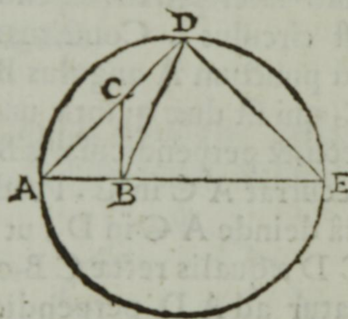
SIt A B exceſſus, quo diameter circuli ſuperat latus trianguli æquilateri in eodẽ circulo inſcripti. Oportet invenire circulum. Ad punctum A conſtituatur angulus B A C, qui duæ tertiæ partes ſit unius recti, & B C, perpendicularis ad A B, occurrat A C in C. Productâ deinde A C in D, ita ut C D æqualis ſit rectæ C B, erigatur ad A D perpendicularis D E occurrens A B productæ, in E. Dico circulum A D E, circa triangulum A E D deſcriptum, eſſe quæſitum. Quoniam igitur triangulum A E D rectangulum eſt; centrum circuli A D E cadet in latus A E recto angulo A D E oppoſitũ; Itaq; A E circuli diameter eſt. Et quia angulus A D E rectus eſt, & angulus D A E duæ tertiæ unius recti: erit reliquus angulus D E A tertia pars unius recti; Quare, per primum lemma, recta D E latus erit trianguli æquilateri in circulo A D E inſcripti. Quod autẽ diameter A E ſuperet DE, latus triãguli æquilateri, exceſſu A B, ſic patet. Ductâ D B; erũt anguli C D B, C B D, ob æqualitatẽ laterum C B, C D, inter ſe æquales. Quare ablatis ipſis ab æqualibus angulis C D E, C B E; remanebunt anguli B D E, D B E æquales inter ſe. Adeoq; recta D E rectæ B E æqualis erit; Eſt autem A B exceſſus, quo diameter

ter A E superat rectam B E; igitur A B excessus etiam erit, quo eadem diameter A E, circuli A D E, superat D E latus trianguli æquilateri in eodem circulo A D E inscripti. Dato igitur excessu, quo diameter circuli superat, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. XVII. PROPOS. XVII.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus quadrati in eodem circulo inscripti, inveniendus est circulus.

Oportet invenire circulum, cujus diameter superet latus quadrati in eodem circulo inscripti dato excessu A B. Erigatur perpendicularis B C ad rectam A B, quæ eidem A B sit æqualis, & adjuncta A C producatur in D, ita ut C D æqualis sit ipsi C B. Deinde D E perpendicularis ad A D occurrat rectæ A B productæ in E. Dico circulũ A E D, circa diametrum A E descriptum, qui necessario per punctũ D trãsit, esse de quo quæritur. Quoniam igitur angulus A D E rectus est, angulus vero D A E semirectus; erit etiam reliquus angulus A E D semirectus; Quare, per secundum lemma, D E latus erit quadrati in circulo A D E inscripti. Cũ autem angulus C D E æqualis sit angulo C B E, & ablatus C D B ablato C B D æqualis, ob æqualitatẽ laterum C D, C B: erit reliquus angulus B D E reliquo angulo D B E æqualis; Quapropter latera D E, B E æqualia inter se erunt; Superat autem diameter A E rectam B E excessu A B; ergo eadem

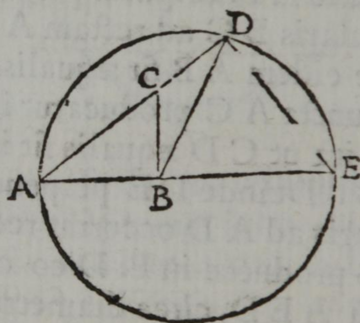


diameter A E ſuperabit D E, latus ſcilicet quadrati in eodem circulo A D E inſcripti, dato exceſſu A B. Dato igitur exceſſu, quo diameter circuli ſuperat latus quadrati, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XVIII. PROPOS. XVIII.

Dato exceſſu, quo diameter circuli ſuperat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcripti, invenire circulum.

SIt A B exceſſus, quo diameter circuli ſuperat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcripti. Inveniendus eſt circulus. Conſtituatur ad punctum A angulus B A C, qui ſit duæ quintæ unius recti, & perpendicularis B C occurrat A C in C. Productâ deinde A C in D, ut ſit C D æqualis rectæ C B, erigatur ad A D perpendicularis D E occurrēs A B productæ in E. Dico circulum A E D, circa triangulum A D E deſcriptum, eſſe quæſitum. Quoniam igitur triangulum A D E rectāgulū eſt; erit latus A E diameter circuli A E D. Et quia angulus A D E rectus eſt; erunt anguli D A E, D E A ſimul angulo recto æquales; Eſt autem angulus D A E duæ quintæ unius recti; ergo angulus D E A tres quintæ erit unius recti; Itaque, per tertium lemma, D E latus erit pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A E D inſcripti. Cum autem anguli C B D, C D B æquales inter ſe ſint, ob laterū C B,

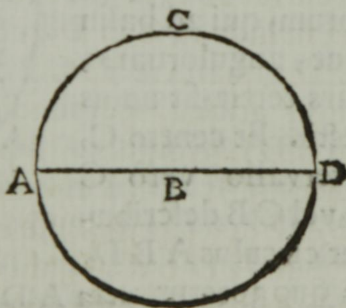


C D æqualitatem : Ablatis ipsis ab angulis rectis C D E, C B E; remanebunt anguli B D E, D B E inter se æquales; Ac propterea D E æqualis erit rectæ B E; Atqui B E superatur à diametro A E excessu A B; ergo D E, latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A E D inscripti, superabitur ab eâdem diametro A E excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo diameter circuli superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti, inventus est circulus. Quod erat faciendum.

PROBL. XIX. PROPOS. XIX.

Dato excessu, quo diameter circuli superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti, invenire circulum.

INvenire oportet circulum, cujus diameter superet latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscripti excessu dato A B. Centro B, intervallo verò B A describatur circulus A C D. Quem dico esse quæsitū. Producatur A B in D. Quoniam igitur, per coroll. propos. 15. 4. elem., latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A C D inscripti æquale est semidiametro B D, & diameter A D superat semidiametrum B D excessu A B; superabit propterea diameter A D, circuli A D C, latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo A D C inscripti, excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo diameter circuli su-

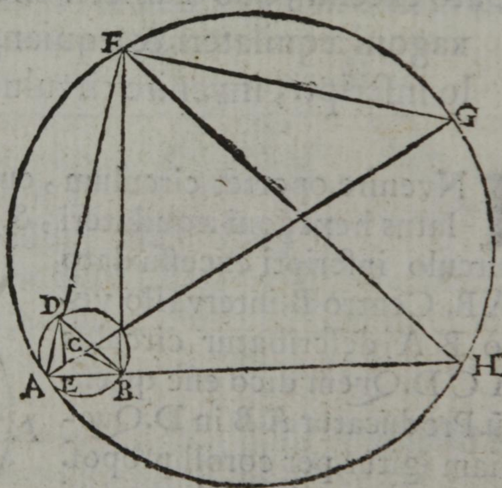


perat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodẽ circulo inſcripti, invenimus circulum. Quod faciendum erat.

PROBL. XX. PROPOS. XX.

Dato exceſſu, quo latus trianguli æquilateri ſuperat latus quadrati in eodem circulo inſcriptorum, invenire circulum.

SIt A B exceſſus, quo latus trianguli æquilateri ſuperat latus quadrati in eodem circulo inſcriptorum. Oportet invenire circulum. Ex quinto præmiſſo lẽmate, conſtituatuſuper A B triangulum iſoſceles A B C, cujus uterque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, pars tertia ſit unius recti. Et centro C, intervallo verò C A, vel C B deſcribatur circulus A B D, in quo aptetur recta A D, quæ faciat cum ſemidia metro A C angulum D A C ſemirectum. Et quia, per primum lemma, A B eſt latus trianguli æquilateri, A D vero, per ſecundum lemma, eſt latus quadrati, in eodem circulo A B D inſcriptorum; erit A B major quam A D. Sumatur igitur ex A B recta E B æqualis rectæ A D, jungaturq; E D, cui æquediſtans agatur B F, occurrens A D



pro-

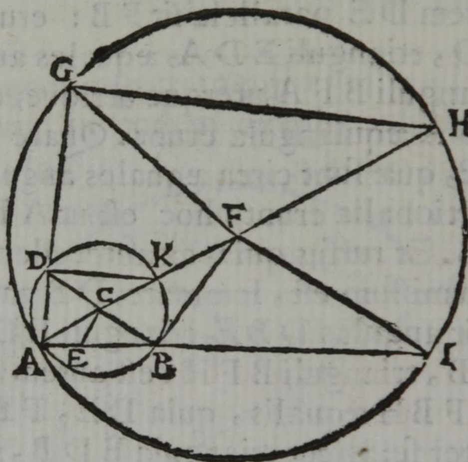
productæ in F,& erectâ ad A F perpendiculari F G, quæ A C productæ occurrat in G, describatur circa triangulũ A F G, circulus A F G H. Quem dico esse quæsitum. Producatur A B in H, junganturque F H, D B. Quoniam ergo triãgulum A F G, est rectangulum; erit latus A G, angulo recto A F G oppositum, diameter circuli. Quare A H erit, per primum præmissum lemma, latus trianguli æquilateri, A F vero, per secundum lemma, erit latus quadrati, in eodem circulo A F G H inscriptorum. Cum autem D E parallela sit F B: erunt anguli A D E, A E D, trianguli E D A, æquales angulis A F B, A B F, trianguli B F A, uterque utrique; ergo triangula E D A B F A æquiangula erunt. Quare latera A D, D E, A F, F B, quæ sunt circa æquales angulos A D E, A F B proportionalia erunt; hoc est ut A D ad D E, ita A F ad F B. Et rursus quia, ex antecedente, quod quarto loco præmissum est, lemmate, D B parallela est rectæ F H; erit angulus D B E, trianguli E D B, æqualis angulo F H B, trianguli B F H: est autem angulus D E B angulo F B H æqualis, quia D E, F B etiam parallelæ sunt inter se: igitur triangula E D B, B F H æquiangula inter se erunt: Ac ideo erit ut D E ad E B, ita F B ad B H: Quare cum sit ut A D ad D E, ita A F ad F B, & ut D E ad E B, ita F B ad B H; erit ex æquo ut A D ad E B, ita A F ad B H; Sed A D, E B inter se sunt æquales: igitur A F, B H inter se æquales erunt. Superat autem recta A H, quæ latus est trianguli æquilateri in circulo A F G H inscripti, rectam B H excessu A B: ergo igitur idem latus A H superabit A F, latus quadrati in eodem circulo A F G H inscripti, eodem excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo latus trianguli æquilateri superat latus quadrati in eodem circulo inscriptorum, inventus est circulus. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. XXI. PROPOS. XXI.

Exceſſu dato, quo latus trianguli æquilateri ſuperat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcriptorum, invenire circulum.

EXceſſu dato A B, quo latus trianguli æquilateri ſuperat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcriptorum, circulum invenire oportet. Conſtituatur, per illud, quod quinto loco præmiſſum eſt, lemma, ſuper A B triangulum iſoſceles A B C, cujus uterq; eorum, qui ad baſim A B sũt angulorum, pars tertia ſit unius recti, & centro C, intervallo verò C A, vel C B circulus deſcribatur A B D, in quo accommodetur D A, quæ conſtituat cum ſemidiametro A C angulum D A C æqualem tribus quintis unius recti. Erit igitur D A, per tertium lemma, latus pentagoni æquilateri, & æquianguli, & A B, per primum lemma, latus trianguli æquilateri, in eodem circulo A B D inſcriptorũ; adeoque erit A B major quã A D. Sumatur igitur ex A B recta E B, quæ æqualis ſit rectæ A D, & adjunctæ E C parallela agatur B F, occurrens A C productæ in F. Dico circulum A G H I, ex centro F, & intervallo F A deſcriptum, eſſe de quo quæritur. Producatur A D in G, A B vero in I, adjungan-



gan-

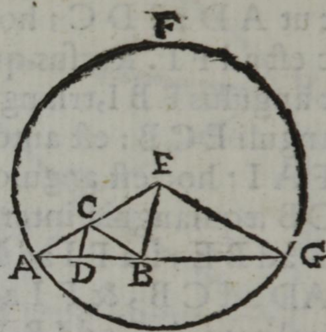
ganturque rectæ D C, D K, & productâ ſemidiametro A F in H, ducantur rectæ G F, G H. Quoniam igitur anguli A D K, A G H inter ſe ſunt æquales, ambo enim ſunt recti, erunt D K, G H inter ſe parallelæ; Ideoque angulus D K A angulo G H A æqualis erit: Sed angulus D C A duplus eſt anguli D K A, angulus verò G F A duplus anguli G H A; ergo angulus D C A, trianguli A D C, æqualis erit angulo G F A, trianguli A G F. Eſt autem angulus G A F communis: ergo triangula A D C, A G F æquiangula inter ſe erunt. Quare erit ut A D ad D C; hoc eſt ad C B, ita A G ad G F; hoc eſt ad F I. Rurſus quia F B parallela eſt rectæ C E; erit angulus F B I, trianguli B F I, æqualis angulo C E B, trianguli E C B: eſt autem angulus F I A æqualis angulo F A I: hoc eſt angulo C B E: ergo triangula F B I, E C B æquiangula inter ſe erunt; Ac proinde erit ut C B ad B E, ita F I ad I B. Quare cum ſit A G ad F I, ut AD ad C B, & F I ad I B, ut C B ad B E; erit ex æqualitate A G ad I B, ut A D ad B E; Atqui A D, B E inter ſe ſunt æquales; ergo igitur A G, I B inter ſe æquales erunt. Superat autem A I rectam B I exceſſu A B; igitur A I, quæ, per primum lemma, eſt latus triãguli æquilateri in circulo A G H I inſcripti, ſuperabit rectam A G, quæ, per tertium lemma, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo A G H I inſcripti, exceſſu dato A B. Itaque dato exceſſu, quo latus trianguli æquilateri ſuperat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcriptorum invenimus circulum. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBL. XXII. PROPOS. XXII.

Dato excessu, quo latus trianguli æquilateri superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, invenire circulum.

SIt A B excessus, quo latus trianguli æquilateri superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum. Oportet invenire circulum. Constituatur, per quintum præmissum lemma, super A B triangulum isosceles A B C, cujus vterq; eorum, qui ad basim sunt angulorum, pars tertia sit unius recti. Et abscisâ ex A B rectâ B D æquali rectæ B C, adjungatur D C, cui parallela agatur B E, occurrēs A C productæ in E. Deniq; centro E, intervallo verò E A, describatur circulus A F G. Quem dico esse quæsitum. Quoniam igitur angulus E G B, triãguli B G E, æqualis est angulo E A B: hoc est angulo C B D, trianguli D B C, & angulus E B G angulo C D B æqualis; (quia C D, B E parallelæ sunt inter se) erunt triangula B G E, D B C æquiangula inter se; adeoque erit B G ad E G, ut D B ad C B: Sunt autem D B, C B inter se æquales; ergo B G, E G æquales inter se erunt. Atqui A G superat B G excessu A B. Ergo eadem A G, quæ per primum lemma, est latus trianguli æquilateri in circulo A F G inscripti, superabit semdiametrum E G: hoc est latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodē circulo A F G inscripti, eodem excessu A B. Itaque dato excessu, quo latus trianguli æquilateri superat latus



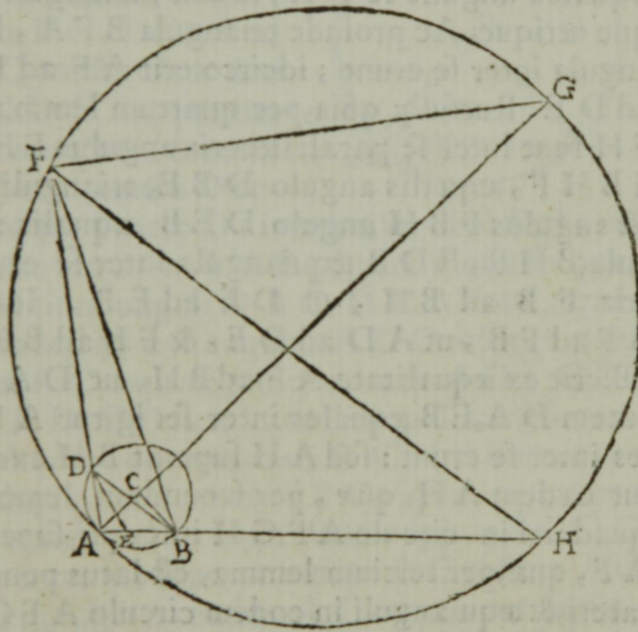
tus

tus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circu-lo inſcriptorũ, inventus eſt circulus. Quod erat faciendũ.

PROBL. XXIII. PROPOS. XXIII.

Dato exceſſu, quo latus quadrati ſuperat latus pen-tagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circu-lo inſcriptorum, invenire circulum.

SIt datus exceſſus A B, quo latus quadrati ſuperat latus pẽtagoni æquilateri, & æquianguli in eodẽ circulo inſcriptorũ. Oportet igitur invenire circulũ. Ad puncta A, & B conſtituantur duo anguli A B C, B A C, quorum uterq; ſit ſemirectus, & rectæ A C, B C coeant in pũcto C. Deinde cẽtro C intervallo verò C A, vel C B, deſcribatur circulus A D B, in quo accommodetur recta A D,



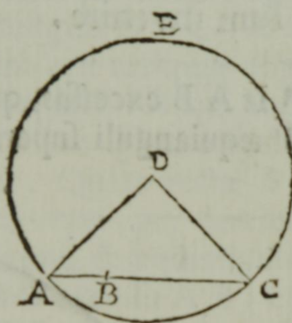
quæ constituat cum semidiametro A C angulum D A C æqualem tribus quintis unius recti, sumaturque ex A B recta B E æqualis rectæ A D, (nimirum A B major est quam A D, nam A B, per secundum lemma, est latus quadrati, A D verò, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum) & adjunctæ D E æquedistans agatur B F, occurrens A D productæ in F, & F G perpendicularis ad A F, occurrat A C in G productæ. Dico circulum A F G H, circa triangulum rectangulum A G F descriptũ, esse de quo quæritur. Producatur A B in H, jũgãturq; rectæ D B, F H. Quoniam igitur B F parallela est rectæ E D; erunt anguli A F B, A B F, trianguli B F A, æquales angulis A D E, A E D, trianguli E D A, uterque utrique; Ac proinde triangula B F A, E D A æquiangula inter se erunt; idcirco erit A F ad F B, ut A D ad D E. Rursusq; quia, per quartum lemma, rectæ D B, F H sunt inter se paralellæ; erit angulus F H B, trianguli B H F, æqualis angulo D B E, trianguli E B D; sed est angulus F B H angulo D E B æqualis: ergo triangula B H F, E D B æquiangula inter se erunt; Quare erit F B ad B H, ut D E ad E B. Itaque cum sit A F ad F B, ut A D ad D E, & F B ad B H, ut D E ad E B: erit ex æqualitate A F ad B H, ut D A ad E B: sunt autem D A, E B æquales inter se; igitur A F, B H æquales inter se erunt: sed A H superat B H excessu A B; igitur eadem A H, quæ, per secundum lemma, est latus quadrati in circulo A F G H inscripti, superabit rectam A F, quæ, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo A F G H inscripti, excessu dato A B. Dato igitur excessu, quo latus quadrati superat latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, invenimus circulum. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. XXIV. PROPOS. XXIV.

Dato excessu, quo latus quadràti superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, circulum invenire.

SIt A B excessus, quo latus quadrati superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum. Oportet igitur invenire circulũ. Ad rectã A B, per propositionem 13. hujus, adjungatur recta B C, ita ut quadratum totius A C duplum sit quadrati adjunctæ B C. Deinde ad puncta A, & C constituãtur duo anguli D A C, D C A, quorum uterque sit semirectus, & rectæ A D, C D sibi in puncto D occurrant. Denique centro D, intervallo verò D A, vel D C, describatur circulus A C E. Quem dico esse quæsitum. Quoniã igitur anguli D A C, D C A simul æquales sunt angulo recto; erit angulus A D C rectus: quare quadratum A C æquale erit quadratis A D, C D; sed quadrata A D, C D sunt inter se æqualia; ergo quadratum A C duplum erit quadrati D C; sed idem quadratum A C duplum est quadrati B C: igitur quadrata B C, C D æqualia inter se erunt. Rectæ igitur B C, D C æquales sunt inter se; superat autem A C rectam B C excessu A B; ergo igitur eadem A C, quæ, per secundum lẽma est latus quadrati in circulo A C E inscripti, superabit semidiametrum D C; hoc est latus hexagoni æquilateri, & æquiãguli in eodẽ circulo A C E inscripti, excessu duo A B. Itaque dato excessu; quo latus qua-

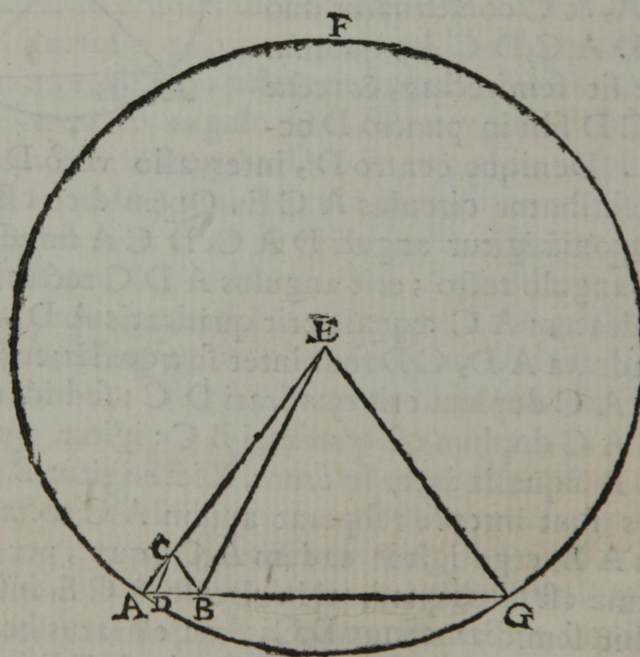


drati ſuperat latus hexagoni æquilateri,& æquiãguli in eodem circulo inſcriptorum,invenimus circulum. Quod erat faciendum.

PROBL. XXV. PROPOS. XXV.

Dato exceſſu, quo latus pentagoni æquilateri, & æquianguli ſuperat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inſcriptorum, circulum invenire.

SIt A B exceſſus, quo latus pentagoni æquilateri, & æquianguli ſuperat latus hexagoni æquilateri, &



æquianguli in eodem circulo inſcriptorum. Oportet inve-

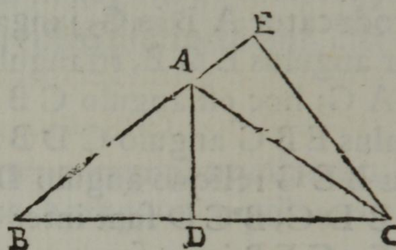
venire circulum. Constituatur, ex antecedente, quod sexto loco præmissum est, lemmate, super A B triangulum isosceles A B C, cujus uterque eorum, qui ad basim A B sunt, angulorum, æqualis sit tribus quintis vnius recti, & ex B A sumatur B D æqualis rectæ B C. Deinde adjunctæ D C æquedistans agatur B E, occurrens A C productæ in E, & centro E, intervallo verò E A, describatur circulus A F G. Quem dico esse quæsitum. Producatur A B in G, jungaturque E G. Quoniam igitur angulus E G B, trianguli B G E, æqualis est angulo E A G; hoc est angulo C B D, trianguli D B C, & angulus E B G angulo C D B æqualis; erit reliquus angulus B E G reliquo angulo D C B æqualis: Atqui anguli B D C, B C D sunt inter se æquales; igitur anguli G B E, G E B inter se æquales erunt. Quare rectæ B G, E G æquales inter se sunt; sed A G, quæ, per tertium lemma, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A F G inscripti, superat B G excessu A B; ergo superabit etiam semidiametrum E G: hoc est latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo A F G inscripti, excessu dato A B. Itaque excessu dato, quo latus pentagoni æquilateri, & æquianguli superat latus hexagoni æquilateri, & æquianguli in eodem circulo inscriptorum, inventus est circulus. Quod facere oportebat.

THEOREMA I. PROPOS. XXVI.

In triangulis amblygonijs, perpendicularis ducta ab angulo obtuso ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub ipsius segmentis majus erit quadrato perpendicularis, rectangulo contento sub uno reliquorum laterum, in

in quod protractum altera cadit perpendicularis, & sub exterius assumptâ inter hanc perpendicularem, & angulum obtusum.

IN triangulo A B C obtusangulo, cadat ab angulo obtuso B A C ad latus oppositum B C perpendicularis A D, & ad alterum reliquorum laterum protractum; hoc est ad latus B A cadat altera perpēdicularis C E. Dico rectangulũ B D C majus esse quadrato A D, rectangulo B A E. Quoniam igitur quadrata B A, A C, & duplum rectanguli B A E simul æqualia sunt quadrato B C, & eidem quadrato B C æqualia sunt quadrata B D, D C, & duplum rectanguli B D C; erunt quadrata B D, D C & duplum rectanguli B D C simul æqualia quadratis B A, A C, & duplo rectanguli B A E; sunt autem quadratis B A, A C æqualia quadrata B D, D C, & quadratum D A bis sumptum: igitur quadrata B D, D C, & duplum rectanguli B D C æqualia erunt quadratis B D, D C, & quadrato A D bis sumpto, & duplo rectanguli B A E: ablatis igitur communibus quadratis B D, D C, remanebit duplum rectanguli B D C æquale quadrato A D bis sumpto, & duplo rectanguli B A E: Est autem rectangulum B D C pars dimidia dupli rectanguli B D C, & quadratum A D una cum rectangulo B A E, est etiam pars dimidia quadrati A D bis sumpti, & dupli rectanguli B A E; ergo igitur rectangulum B D C æquale erit quadrato A D, & rectangulo B A E; hoc est rectangulum B D C majus

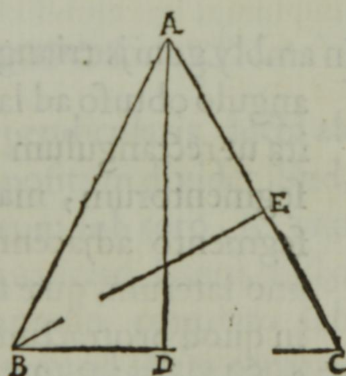


erit quadrato A D, rectangulo B A E. Quare in triangulis amblygonijs perpendicularis ducta, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II. PROPOS. XXVII.

In oxygonijs triangulis, perpendicularis ducta ab uno angulorum ad latus oppoſitum dividet illud, ita ut rectangulum contentum ſub ipſius ſegmentis, minus erit quadrato perpendicularis, rectangulo contento ſub uno reliquorum laterum, in quod altera perpendicularis cadit, & ſub interius aſſumptâ inter hanc perpendicularem, & angulum à quo prima perpendicularis ducta eſt.

IN triangulo A B C acutangulo, cadat ab uno angulorum B A C ad latus oppoſitum B C perpendicularis A D, & ad alterum reliquorum laterum; hoc eſt ad latus A C altera perpendicularis cadat B E. Dico rectangulum B D C minus eſſe quadrato A D rectangulo C A E. Quoniam igitur quadratum B C una cum duplo rectãguli C A E æquale eſt quadratis A B, A C, & eiſdem quadratis A B, A C æqualia ſunt quadrata B D, D C, & quadratum A D bis ſumptum; Igitur quadratum B C una cum duplo rectanguli C A E æquale erit quadratis B D, D C, & quadrato A D bis ſumpto; ſunt autem quadrato B C æqualia quadrata B D, D C, & duplum



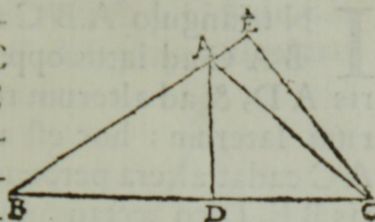
re-

rectanguli B D C; igitur quadrata B D,D C,& duplũ rectanguli B D C, vna cum duplo rectanguli C A E simul æqualia erunt quadratis B D,D C, & quadrato A D bis sũpto; Quare ablatis communibus quadratis B D, D C, remanebunt duplum rectanguli B D C, & duplum rectanguli C A E simul æqualia quadrato A D bis sumpto; Est autem rectangulum B D C una cum rectangulo C A E pars dimidia dupli rectanguli B D C, & dupli rectanguli C A E, atque quadratum A D pars dimidia est etiam quadrati A D bis sumpti; igitur erit rectangulum B D C vna cum rectangulo C A E æquale quadrato A D; hoc est rectangulum B D C minus erit quadrato A D, rectangulo C A E. In oxygonijs igitur triangulis perpendicularis ducta ab uno angulorum &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA III. PROPOS. XXVIII.

In amblygonijs triangulis, perpendicularis ducta ab angulo obtuso ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub toto, & uno segmentorum, majus erit quadrato lateris dicto segmento adjacentis, rectangulo contento sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum altera cadit perpendicularis, & sub exterius assumptâ inter perpendicularem, & angulum obtusum.

IN

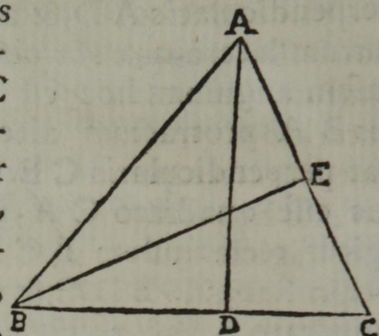


IN triangulo A B C obtusangulo, ab ãgulo obtuso B A C cadat ad latus oppositum B C perpendicularis A D, & ad alterutrum laterũ, quæ sũt circa obtusum angulum; hoc est ad latus B A protractum altera cadat perpendicularis C E. Dico rectangulum B C D majus esse quadrato C A, rectangulo B A E. Quoniam igitur rectangulum B C D æquale est quadrato D C atq; rectangulo B D C; & rectangulum B D C æquale est quadrato A D, & rectãgulo B A E per propos. 26. hujus; igitur rectangulum B C D æquale erit quadratis D C; A D, & rectangulo B A E; Atqui quadratis D C, A D æquale est quadratum C A; igitur rectangulum B C D æquale erit quadrato C A, & rectangulo B A E; hoc est rectangulum B C D majus erit quadrato C A, rectangulo B A E. In Amblygoniis igitur triangulis perpendicularis ducta ab angulo obtuso, &c. Quod demostrandum erat.

THEOREMA IV. PROPOS. XXIX.

In oxygoniis triangulis, perpendicularis ducta ab uno ãgulorum ad latus oppositum dividet illud, ita ut rectangulum contentum sub toto, & uno segmentorum minus erit quadrato lateris dicto segmento adjacentis, rectangulo contento sub uno reliquorum laterum, in quod altera perpendicularis cadit, & sub interius assumpta inter hanc perpendicularem, & angulum à quo prima perpendicularis ducta est.

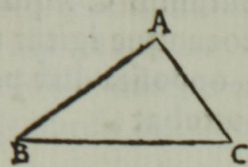
IN triangulo A B C acutangulo, ab uno angulorum B A C ad latus oppoſitum B C cadat perpendicularis A D, & ad alterum reliquorum laterum; hoc eſt ad latus A C cadat altera perpendicularis B E. Dico rectangulum B C D minus eſſe quadrato C A, rectangulo C A E. Quoniam igitur quadrata A D, D C æqualia ſunt quadrato A C, & quadratum A D, per propoſ. 27. hujus, æquale eſt rectangulis B D C, C A E: erunt rectangula B D C, C A E, una cum quadrato D C æqualia quadrato A C; Sed rectangulum B D C, una cum quadrato D C æquale eſt rectangulo B C D; Igitur rectangulum B C D, una cum rectangulo C A E æquale erit quadrato A C; hoc eſt rectangulum B C D minus erit quadrato A C, rectangulo C A E. Quare in oxygoniis triangulis perpendicularis ducta ab uno angulorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

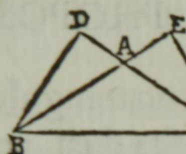


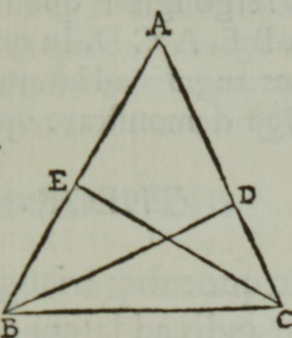
THEOREMA V. PROPOS. XXX.

In quocunque triangulo, ſi à duobus angulis ad latera oppoſita duæ perpendiculares demittãtur, verſus eaſdẽ partes; quadratum reliqui lateris æquale erit rectangulis contentis ſub lateribus in quæ perpendiculares cadunt, & ſub eorundem ſegmẽtis inter perpendiculares, & reliquum latus interpoſitis.

IN triangulo A B C,ab angulis A B C,A C B demittantur ad latera oppoſita A C,A B perpendiculares B D,C E quę verſus eaſdē partes cadāt. Dico quadratum reliqui lateris B C ęquale eſſe rectangulis A B E,A C D. Vel igitur reliquus angulus B A C eſt rectus, vel acutus, vel obtuſus. Si rectus,ut in 1.figura,cadent perpendiculares ductæ ab angulis A B C, A C B ad latera oppoſita A C, A B in puncto A;Quare manifeſtum eſt quadratum ex B C æquale eſſe rectangulis A B A, A C A ; hoc eſt quadratis A B , A C . Si vero angulus B A C ſit acutus, ut in 2. figura : erit quadratum ex B C, una cum duplo rectanguli C A D, vel duplo rectanguli B A E æquale quadratis A B, A C ; hoc eſt quadratum B C; una cum rectangulis C A D , B A E æquale erit quadratis A B, A C; ſed quadratum A B æquale eſt rectangulis B A E, A B E , quadratum vero A C æquale rectangulis C A D, A C D;igitur quadratum B C una cum rectangulis C A D , B A E æquale erit rectangulis A B E, B A E, A C D, C A D . Quare ablatis communibus rectangulis C A D, B A E, remanebit quadratum B C æquale rectangulis A B E,A C D . Sit denique angulus B A C obtuſus , ut in 3. figura ; erit quadratum B C æquale quadratis A B, A C , & duplo rectanguli B A E , vel duplo rectanguli C A D; hoc eſt quadratum B C æquale erit quadratis A B , A C , & rectangulis B A E , C A D : ſed quadratum B A, una cum rectangulo





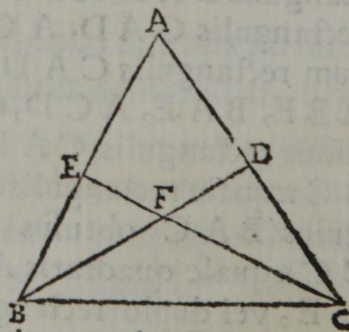


B A E æquale eſt rectangulo A B E,& quadratum A C, una cum rectangulo C A D æquale eſt rectangulo A C D: ergo igitur quadratum B C æquale erit rectangulis A B E, A C D. In quocunque igitur triangulo, ſi à duobus angulis ad latera oppoſita duæ perpendiculares,&c. Quo demonſtrare oportebat.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI.

In quocunq; triangulo acutangulo, ſi à duobus angulis ad latera oppoſita duæ perpendiculares ſe mutuo ſecantes demittantur: rectangula contenta ſub letaribus in quæ perpẽdiculares cadunt, & ſub eorundem ſegmentis inter perpendiculares, & reliquum latus interpoſitis æqualia erunt rectangulis contentis ſub perpendicularibus, & ſub earundem ſegmentis reliquo lateri adjacentibus.

IN triangulo acutangulo A B C, ab angulis A B C, A C B ad latera oppoſita A C, A B demittantur perpendiculares B D, C E, quæ ſe mutuo ſecent in F. Dico rectangula A B E, A C D æqualia eſſe rectangulis E C F, D B F. Quoniam igitur angulus B A C eſt acutus; erunt (ut in ſecunda parte propoſitionis antecedentis demonſtravimus) rectangula A B E, A C D quadrato B C æqualia. Et rurſus quia angulus B F C major eſt angulo recto F D C; erit ipſe obtuſus; adeoq; (ut in ter-

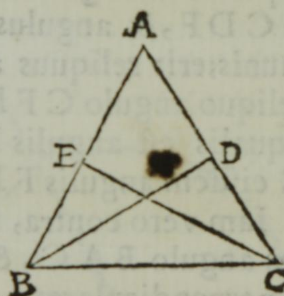


tertia parte præcedentis propoſitionis demóſtravimus) erunt rectangula D B F, E C F eidem quadrato B C æqualia; ac propterea rectangula A B E, A C D rectangulis E C F, D B F æqualia erunt. In quocunque igitur triangulo acutangulo ſi à duobus angulis ad latera oppoſita duæ perpẽdiculares, &c. Quod erat demonſtrãdũ.

THEOREMA VII. PROPOS. XXXII.

In quocunque triangulo acutangulo, ſi à duobus angulis ad latera oppoſita duæ perpendiculares demittantur; latera in quæ perpendiculares cadunt eandem proportionem habebunt, ac perpendiculares.

IN triangulo acutangulo A B C ſint ab angulis A B C, A C B ad oppoſita latera A C, A B ductæ perpendiculares B D, C E. Dico latera A B, A C, eandem inter ſe proportionem habere, ac perpendiculares A D, C E. Quoniam igitur angulus B D A, trianguli B A D, æqualis eſt angulo C E A, trianguli C A E, angulus vero D A B communis; erit reliquus angulus A B D reliquo angulo A C E æqualis: æquiangula ſunt igitur triangula B A D, C A E; adeoque erit A B, ad B D, ut A C ad C E; igitur permutando ut A B, ad A C ita B D, ad C E. In quocunque igitur triangulo acutangulo, ſi à duobus angulis ad latera oppoſita, &c. Quod erat demonſtrandum.

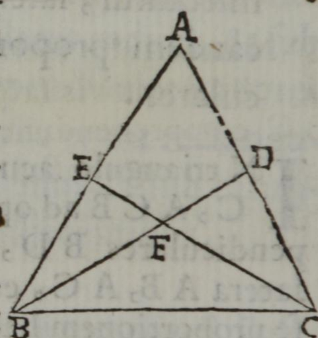


THEO-

THEOREMA VIII. PROPOS. XXXIII.

In quocunque triangulo acutangulo, rectæ à duobus angulis ad latera opposita ductæ, si fuerint perpendiculares; facient cum reliquo latere duos angulos reliquo angulo æquales; Et si fecerint cum reliquo latere duos angulos reliquo angulo æquales, & una earum perpendicularis fuerit; altera perpendicularis erit.

IN triangulo acutangulo A B C, sint B D, C E perpendiculariter ductæ ab angulis A B C, A C B ad latera A C, A B. Dico angulos D B C, E C B simul æquales esse reliquo angulo B A C. Quoniam igitur angulus C E A, trianguli A E C, æqualis est angulo F D C trianguli C D F, & angulus D C F communis; erit reliquus angulus E A C reliquo angulo C F D æqualis; atqui angulus C F D æqualis est angulis F B C, F C B; igitur angulus B A C eisdem angulis F B C, F C B æqualis erit.



Iam vero contra, sint anguli F B C, F C B simul æquales angulo B A C, & B D sit perpendicularis. Dico C E perpendicularem etiam esse. Quoniam igitur angulus B A C æqualis est angulis F B C, F C B, & eisdem angulis F B C, F C B æqualis est angulus D F C; erunt anguli B A C, D F C æquales inter se; quare cum duo anguli E A C, E C A, trianguli E A C, æquales sint duobus ãgulis D F C, F C D, trianguli D C F, uterq; vtriq; erit reliquus C E A reliquo F D C æqualis; sed angulus F D

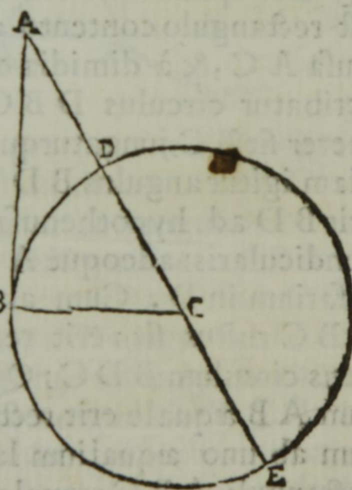
C re-

C rectus est; igitur C E A rectus erit; acideo C E perpendicularis. In quocunque igitur triangulo acutangulo, rectæ à duobus angulis, &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOREMA IX. PROPOS. XXXIV.

In quolibet triangulo rectangulo, quadratum descriptum à quovis latere eorum, quæ rectum angulum comprehendunt æquale est rectangulo comprehenso à composita ex hypothenusa, & reliquo latere tanquam ab una linea, & ab excessu quo hypothenusa idem latus superat.

IN triangulo rectangulo A B C, quadratum descriptum à quovis latere eorum, quæ angulum rectum A B C comprehendunt, puta àlatere A B, æquale est ei, quod sub composita ex hypothenusa A C, & reliquo latere C B tanquam ab una recta linea, & sub excessu, quo hypothenusa A C superat idẽ latus C B continetur, rectangulo. Facto centro C, intervallo vero C B describatur circulus B D E, producaturque A C in E. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad semidiametrum C B; erit tangens circulum B D E; ac propterea quadratum tangentis A B erit æquale ei, quod sub secante A E, & exterius assumpta D A continetur, rectangulo: sed secans A E composita est ex hypothenusa A C, & ex C



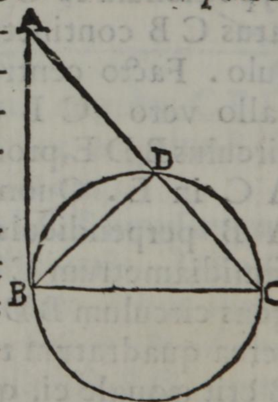
E hoc

E, hoc eſt ex reliquo latere C B, & exterius aſſumpta A D eſt exceſſus, quo hypothenuſa A C idem latus C B ſuperat; igitur quadratum lateris A B æquale eſt rectangulo contento ſub compoſita ex hypothenuſa A C, & reliquo latere C B, & ſub exceſſu A D, quo hypothenuſa A C idem latus C B ſuperat. In quolibet igitur triangulo rectangulo, quadratum deſcriptum à quovis latere eorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA X. PROPOS. XXXV.

In triangulo iſoſcele rectangulo, quadratum ab uno æqualium laterum deſcriptum æquale eſt ei, quod ab hypothenuſa, & à dimidia hypothenuſæ comprehenditur rectangulo.

IN triangulo iſoſcele rectangulo A B C, quadratum deſcriptum ab vno æqualium laterum A B æquale eſt rectangulo contento ab hypothenuſa A C, & à dimidia ejuſdem. Deſcribatur circulus D B C, cujus diameter ſit B C, jungaturque B D. Quoniam igitur angulus B D C rectus eſt, erit B D ad hypothenuſam A C perpendicularis; adeoque A C diviſa erit bifariam in D. Cum autem angulus A B C rectus ſit; erit recta A B tangens circulum B D C; Quare quadratum A B æquale erit rectangulo C A D; hoc eſt quadratum ab uno æqualium laterum A B, trianguli iſoſcelis rectanguli A B C æquale erit rectangulo comprehenſo ab hypothenuſa A C, & ab ipſius dimidia A D. Itaque



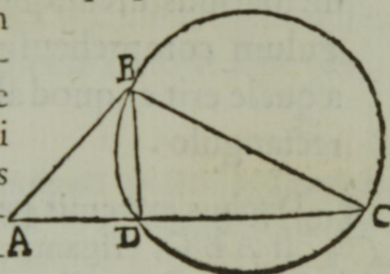
in

in triangulo iſoſcele rectangulo, quadratū ab uno æqualium laterum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXVI.

Si ab angulo recto, trianguli rectanguli, perpendicularis ad baſim ducta fuerit; rectangulum quod ſub hypothenuſa, & uno ſegmentorum continetur æquale erit quadrato ejuſdem ſegmenti, & ei, quod ſub ambobus ſegmentis continetur rectangulo.

AB angulo recto A B C, trianguli rectanguli B A C, demittatur ad baſim A C perpendicularis B D. Dico, rectangulum contentum ſub hypothenuſa A C, & alterutro ſegmentorū, A D æquale eſſe quadrato dicti ſegmenti A D, & ei, quod ſub ambobus ſegmentis A D, D C continetur, rectangulo. Circa diametrum B C deſcribatur circulus



B C D, qui neceſſario tranſibit per punctum D. Quoniā igitur A B perpendicularis eſt ad diametrum B C; erit tangens circulum B D C; quare rectangulum C A D quadrato A B erit æquale; ſed eidē quadrato A B æqualia ſunt quadrata A D, B D; igitur rectangulum C A D quadratis A D, B D erit æquale; eſt autem quadratum B D æquale rectāgulo A D C; ergo rectangulum C A D æquale erit quadrato A D, & rectangulo A D C. Si igitur ab angulo recto, trianguli rectanguli, perpendicularis ab baſim ducta fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

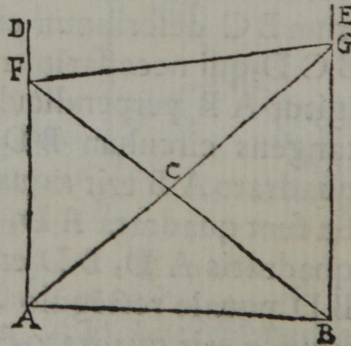
COROLLARIUM.

Ex hujus propositionis demonstratione patet, si ab angulo recto, trianguli rectanguli perpendicularis, ad basim ducta fuerit; rectangulum sub ipsa, & uno segmentorum comprehensum æquale esse quadrato dicti segmenti, & quadrato perpendicularis.

THEOR. XII. PROPOS. XXXVII.

Si à duobus extremis punctis lateris cujuscunque trianguli duæ perpendiculares ad idem latus erigantur, & reliqua latera producãtur donec perpendicularibus utcunque productis occurrant: rectangulum comprehensum sub lateribus productis æquale erit ei, quod ab adjunctis comprehenditur, rectangulo.

A Duobus extremis punctis A, B lateris A B, trianguli A B C, erigantur perpendiculares A D, B E ad idem latus B C; & reliqua latera A C, B C producantur donec occurrant perpendicularibus in F, G. Dico rectangulum contentum sub lateribus A C, B C æquale esse ei, quod sub adjunctis F C, C G continetur, rectangulo. Adjungatur recta F G. Quoniam igitur triangula B F G, G A B sunt inter se æqualia, ablato communi triangulo B C G; erit triangulum A C B triangulo F C G æquale: est autem angulus A C B, trianguli A B C, æqualis angulo F C G, triãguli G C F: igitur latera A C,



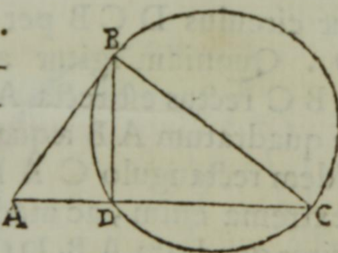
C B

CB,trianguli A C B,lateribus F C, C G, trianguli G C F erunt reciproca: hoc eſt erit ut A C ad C G, ita F C ad C B; ac ideo rectangulum contentum ſub extremis A C,C B æquale erit ei,quod ſub medijs F C, C G continetur,rectangulo. Itaque ſi à duobus extremis punctis lateris cujuſcunque trianguli duæ perpendiculares, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. XIII. PROPOS. XXXVIII.

Si ab angulo recto, trianguli ſcaleni rectanguli, perpendicularis ad baſim ducta fuerit, ſecans eam in partes inæquales,majus vero ſegmentum minori lateri eorum, quæ ſunt circa rectum angulum, ſit æquale;baſis extrema, ac media ratione à perpendiculari ſecabitur.

AB angulo recto A B C, trianguli ſcaleni rectanguli B A C, ducatur ad baſim A C perpendicularis B D, dividens eam in partes inæquales,ſitque majus ſegmentum D C æquale minori lateri A B. Dico,baſim A C extrema,ac media ratione ſectam eſſe in D. Deſcribatur circa diametrum B C circulus B C D, qui tranſibit per punctum D. Quoniam igitur angulus A B C rectus eſt; erit A B tangens circulum D C B; adeoque quadratum A B æquale erit rectãgulo C A D; eſt autẽ recta D C æqualis rectæ A B; igitur quadratũ D C æquale erit etiam rectangulo C A D; quare erit tota A C ad majus ſegmentum D C, ut majus ſegmentum

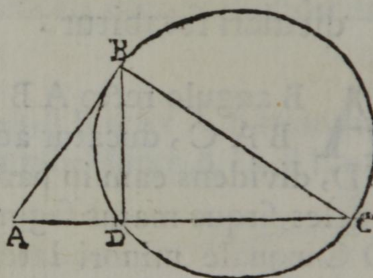


D C ad minus ſegmentum D A. Extrema igitur, ac media ratione ſecta eſt baſis A C in D à perpendiculari B D. Quare ſi ab angulo recto, trianguli ſcaleni rectanguli, perpendicularis, &c. Quod erat probandum.

THEOR. XIV. PROPOS. XXXIX.

Si ab angulo recto, trianguli ſcaleni rectanguli, perpẽdicularis ad baſim ducta fuerit, dividens eam extrema, ac media ratione; majus ſegmentum æquale erit minori lateri eorum, quæ ſunt circa angulum rectum.

SIt ab angulo recto A B C, trianguli ſcaleni rectanguli A B C, ducta ad baſim A C perpendicularis B D, quæ eam extrema, ac media ratione dividat in D. Dico majus ſegmentum D C minori lateri A B eſſe æquale. Deſcribatur circulus D C B, cujus diameter ſit B C; tranſibit igitur circulus D C B per punctũ D. Quoniam igitur angulus



A B C rectus eſt; recta A B tanget circulum D C B: Quare quadratum A B æquale erit rectangulo C A D; ſed eidem rectangulo C A D æquale eſt quadratum D C; (extrema enim, ac media ratione ſecta eſt A C in D) igitur quadrata A B, D C inter ſe æqualia erunt; adeoq; rectæ A B, D C inter ſe æquales erunt. Si igitur ab angulo recto, trianguli ſcaleni rectanguli, perpendicularis, &c. Quod demonſtrandum erat.

CO-

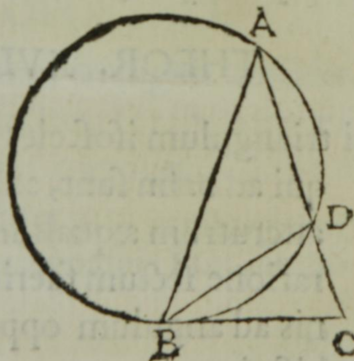
COROLLARIUM.

Hinc sequitur, si ab angulo recto, trianguli scaleni rectanguli, perpendicularis ad basim ducta fuerit, dividens eam extrema, ac media ratione; quadratum majoris segmenti æquale esse quadratis, quæ fiunt alterum à minori segmento, alterum vero à perpendiculari. Ostendimus enim quadratum majoris segmenti D C æquale esse quadrato B A, cui æqualia sunt quadrata, quæ fiunt alterum à minori segmento A B, alterum vero à perpendiculari B D; ergo quadratum majoris segmenti D C æquale erit quadratis, quæ fiunt alterum à minori segmento A D, alterum vero à perpendiculari B D.

THEOR. XV. PROPOS. XL.

Si triangulum isosceles habuerit utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui, & alteruter æqualium angulorum bifariam sectus fuerit; recta linea secans angulum secabit latus oppositum extrema, ac media ratione.

TRiangulum A B C isosceles habeat utrumque eorum, qui ad basim B C sunt, angulorum, duplum reliqui B A C, & recta B D secet bifariã alterutrũ æqualium angulorum, A B C. Dico rectam B D secare latus oppositum A C extrema, ac media ratione in D. Circa triangulum A D B describatur circulus B A D. Quoniam igitur angulus D C B duplus est anguli B A C, & angulus D B A æqualis est angulo D A B; erit angulus D C B æqua-



lis angulis D B A, B A D; ſed eiſdem angulis D B A, B A D æqualis eſt angulus C D B; igitur anguli C D B, D C B inter ſe æquales erunt; adeoque latus B C lateri B D erit æquale; atqui eidem lateri B D æquale eſt latus A D, ob æqualitatem angulorum D B A, B A D; igitur latera B C, D A inter ſe erunt æqualia. Cum autem angulus C B D æqualis ſit angulo B A D; erit C B tangens circulum B A D; quare quadratum B C æquale erit rectangulo A C D; eſt autem, ex demonſtratis, A D æqualis rectæ BC; igitur quadratũ A D eidem rectangulo A C D erit æquale; ac ideo erit tota A C ad majus ſegmẽtum A D, ut majus ſegmentum A D ad minus ſegmẽtum D C. Extrema, ac media ratione ſectũ eſt igitur latus A C in D. Si igitur triangulum iſoſceles habuerit utrumque eorum, &c. Quod probandum erat.

COROLLARIUM.

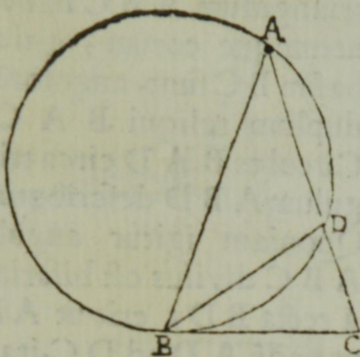
EX hujus propoſitionis demonſtratione manifeſtum eſt, ſi unum æqualium laterum, trianguli iſoſcelis, cujus uterque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum, duplus eſt reliqui, extrema ac media ratione ſectum fuerit: majus ſegmentum æquale eſſe baſi.

THEOR. XVI. PROPOS. XLI.

Si triangulum iſoſceles habuerit utrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui, & alterutrum æqualium laterum extrema, ac media ratione ſectum fuerit; recta linea à puncto ſectionis ad angulum oppoſitum ducta dividet illum bifariam.

Ha-

HAbeat triangulũ iſoſceles A B C utrumque corũ, qui ad baſim B C ſunt, angulorum, duplum reliqui B A C, & alterutrum æqualiũ laterum, A C ſit ſectum extrema, ac media ratione in D. Dico, rectam D B ſecare angulum A B C bifariam. Circa triangulum A B D, circulus B A D deſcribatur. Quoniam igitur, per coroll: propoſ- præcedentis, rectæ A D, B C inter ſe ſunt æquales; erunt ipſarũ quadrata inter ſe æqualia; ſed quadratum A D æquale eſt rectangulo A C D; igitur quadratum B C eidem rectangulo A C D erit æquale; quare B C tangens erit circulum B A D; ac propterea angulus C B D angulo B A C erit æqualis; eſt autem angulus B A C ſubduplus anguli A B C; igitur angulus C B D ſubduplus etiam erit; hoc eſt pars dimidia ejuſdem anguli A B C; Quapropter angulus A B C diviſus erit bifariam à recta D B. Itaque ſi triangulum iſoſceles habuerit utrumque eorum, qui ad baſim ſunt, &c. Quod probandum erat.



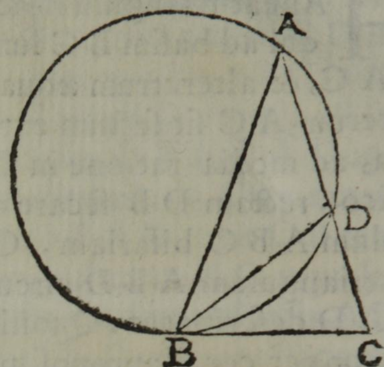
THEOR. XVII. PROPOS. XLII.

Si alterutrum æqualium laterum, trianguli iſoſcelis, extrema, ac media ratione ſectum fuerit, & quæ à puncto ſectionis ad angulum oppoſitum ducitur recta linea diviserit illum bifariam; triangulũ habebit utrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SIt triãgulũ A B C iſoſceles, cujus alterutrũ æqualiũ laterũ, A C ſit ſectũ extrema, ac media ratione in

D, &

D,& recta D B secet angulum A B C bifariam. Dico triangulum A B C habere utrumque eorum, qui ad basim B C sunt, angulorũ, duplum reliqui B A C. Circulus B A D circa triãgulum A B D describatur. Quoniam igitur angulus A B C divisus est bifariam



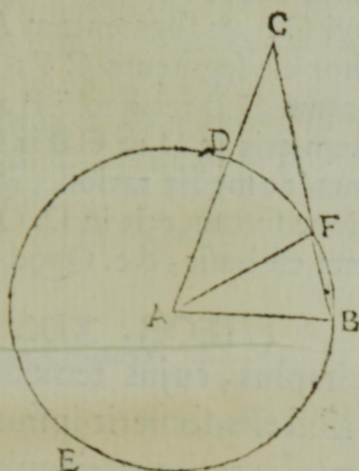
à recta B D; erit ut A D ad D C, ita A B ad B C; sed ut eadẽ A D ad D C, ita est tota A C ad A D; igitur erit ut A C ad AD, ita A B; hoc est A C ad B C; Itaq; A C ad duas A D, B C eandem habet rationem; Quare A D, B C æquales inter se erunt; est autem quadratum A D æquale rectangulo A C D; (extrema enim, ac media ratione secta est A C in D) igitur quadratum B C eidem rectangulo A C D erit æquale; quare B C tangens erit circulum B A D; ideoq; angulus C B D angulo B A C erit æqualis; atqui anguli C B D duplus est angulus A B C; igitur duplus erit etiam angulus A B C anguli B A C. Ac propterea angulus A C B ejusdem anguli B A C duplus erit, ut potè qui æqualis angulo A B C. Si ergo alterutrum æqualium laterum trianguli isoscelis extrema, ac media ratione sectum, &c. Quod erat probandum.

THEOR. XVIII. PROPOS. XLIII.

Circulus, cujus semidiameter est basis trianguli isoscelis, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplus erit reliqui; secabit ipsius trianguli crura extrema, ac media ratione.

Sit

Sit triangulum A B C isosceles, cujus uterque eorum, qui ad basim A B sunt, angulorum, duplus sit reliqui anguli B C A, & basis A B sit semidiameter circuli B D E. Dico circulum B D E secare crura C B, C A extrema, ac media ratione in F, & D. Quod circulus B D E crura C B, C A secet, est manifestum, nam secus angulus C B A esset rectus, vel obtusus, & latus A C minus esset latere A B, quæ sunt absurda. Secat igitur circulus B D E crura C B, C A. Dico, & extrema, ac media ratione ea secare. Ducatur A F. Quoniam igitur angulus A F B æqualis est angulo F B A, ob æqualitatem laterum A F, A B, & eidem angulo F B A æqualis est angulus C A B; erit angulus A F B, trianguli B F A, æqualis angulo C A B, trianguli B A C; est autem angulus F B A communis: ergo reliquus angulus F A B reliquo B C A erit æqualis: æquiãgula sunt igitur triangula B A C, B F A: Rursus quia ãguli C A B, A F B sunt inter se æquales, & angulus A F B æqualis est angulis; F C A, F A C internis, & oppositis; erit angulus C A B eisdẽ angulis F C A, F A C æqualis; sed angulus F C A pars dimidia est anguli C A B; igitur altera medietas erit angulus C A F; æquales sunt igitur anguli F C A, C A F inter se; ideoq; latus C F lateri F A erit æquale: sed eidẽ lateri F A æquale est latus B A: igitur C F, B A inter se ęqualia erunt. Quapropter, cũ triãgula C B A, F B A sint æquiãgula; erit C B ad B A, ut B A; hoc est C F ad F B. Itaq; tota C B est ad majus segmentũ C F, ut majus segmẽtum C F ad minus

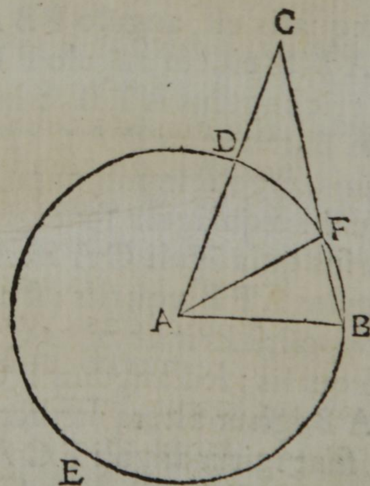


 F B:

F B: Divisa est igitur C B extrema, ac media ratione in F. Quod etiam latus C A sectum sit extrema, ac media ratione in D, sic demonstramus. Latus C A æquale est lateri C B, & segmentum A D æquale semediametro A B; hoc est segmento C F; erit propterea reliquum segmentum C D reliquo F B æquale. Quo circa latus C A sectum erit in D, ut C B in F; sed C B sectum est in F extrema, ac media ratione; igitur C A extrema, ac media ratione sectum erit in D. Quare circulus, cujus semidiameter est basis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XIX. PROPOS. XLIV.

Si circulus, cujus semediameter est basis trianguli isoscelis, secuerit ipsius trianguli crura extrema, ac media ratione: triãgulum habebit utrumque eorũ, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.



Basis A B, trianguli isoscelis B A C sit semediameter circuli BDE, qui secet crura C B, C A extrema, ac media ratione in F, & D. Dico triangulum BAC habere utrũque eorum, qui ad basim B A sunt, angulorum, duplum reliqui B C A. Ducatur A F. Quoniam igitur angulus A F B, trianguli A B F, æqualis est angulo F B A; hoc est angulo C A B, trianguli B A C, & angulus F B A est communis; erit reliquus angulus B A F reliquo angulo B C A æqualis.

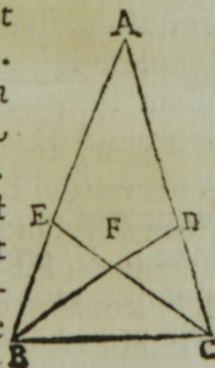
Et

Et rursus quia latus C B sectum est extrema , ac media ratione in F: erit,ex coroll:propos.40. hujus, majus segmẽtũ C F æquale basi B A; est autẽ eidem B A æqualis recta A F ; ergo F C, F A inter se æquales erunt. Idcirco angulus F A C angulo F C A erit æqualis: Atqui ostendimus angulum B A F eidem angulo F C A esse æqualem; igitur totus angulus B A C duplus erit anguli B CA;ideoque ejusdem anguli B C A duplus erit angulus C B A,ut pote qui æqualis angulo C A B. Itaque si circulus , cujus semidiameter est basis trianguli isosceles,&c.Quod erat ostendendum .

THEOR. XX. PROPOS. XLV.

Si triangulum isosceles habuerit utrumque eorum , qui ad basim sunt, angulorum,duplum reliqui, & uterque bifariam sectus fuerit : rectæ lineæ , quæ angulos secant productæ ad opposita latera extrema,ac media ratione mutuo se se intersecabũt.

TRiangulum isosceles A B C habeat utrumque eorum, qui ad basim B C sunt, angulorum , duplum reliqui B A C, & rectæ B D , C E secent æquales angulos A B C,A C B bifariam. Dico, rectas B D,C E ad opposita latera A C , A B productas extrema,ac media ratione se se mutuo in F intersecare. Quoniam igitur latus A C sectum est extrema , ac media ratione in D ; erit majus segmentum A D, ex coroll: propos. 40. hujus, æquale basi B C ; quare erit A D ad D C,ut B C ad idem C D, sed ut B C ad C D,ita est etiam B F ad F D; ergo ut A D ad D C , ita erit B F ad F D ; est autem

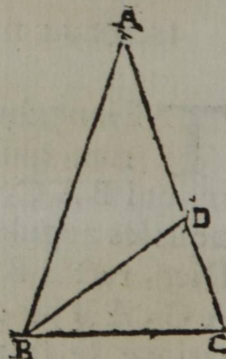


tem A C extrema, ac media ratione secta in D; igitur B D extrema, ac media ratione secta erit in F. Non secus ostendemus C E extrema, ac media ratione sectam esse in F; ergo igitur rectæ B D, C E extrema, ac media ratione in F se mutuo intersecabunt. Si igitur triangulum isosceles habuerit utrumq; eorum, qui ad basi n... sunt, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XXI. PROPOS. XLVI.

Si latus trianguli isoscelis, cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplus est reliqui, & basis ejusdem componantur; tota recta linea extrema, ac media ratione secabitur.

Sit triangulũ A B C isosceles, cujus uterq; eorum, qui ad basim B C sunt, angulorum, duplus sit reliqui B A C. Dico, si unum æqualium laterum, A B, & basis B C componãtur, totam rectam lineam extrema, ac media ratione secari. Dividatur angulus A B C bifariam per rectam B D productam in puncto D lateris A C. Quoniam igitur recta B D secat angulum A B C bifariam; erit, ut segmentum A D ad segmentum D C, ita latus A B ad latus B C; Sed A C, per propos. 40. hujus, secta est extrema, ac media ratione in D; ergo igitur si latus A B, & basis B C componantur, tota recta linea extrema, ac media ratione secta erit in puncto B. Itaque, si latus trianguli isoscelis cujus uterque eorum, qui ad basim sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

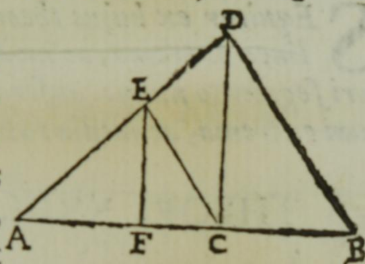


THEOR.

THEOR. XXII. PROPOS. XLVII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit; rectangulum contentum sub majori segmento, & sub excessu, quo majus segmentum minus superat æquale erit ei, quod à minori segmento describitur, quadrato.

SIt recta A B extrema, ac media ratione secta in C. Dico rectangulum comprehensum à majori segmẽto A C, & ab excessu, quo majus segmentum A C superat minus C B æquale esse quadrato minoris segmenti C B. Ad rectam A B erigatur a puncto sectionis quævis perpendicularis C D, junganturque A D, D B, &



C E occurrens A D in E paralella sit rectæ B D, demũ a puncto E ducatur E F parallela ipsi D C. Quoniam igitur in triangulo A B D recta C E parallela est basi B D; erunt latera A B, A D proportionaliter secta in C, & E. Et rursus quia E F parallela est basi D C, trianguli A C D; erunt latera A D, A C proportionaliter secta in E, & F; sed A D divisa est in E, ut A B in C; igitur A C divisa erit in F, ut eadem A B in C; atqui A B extrema, ac media ratione divisa est in C; igitur A C extrema, ac media ratione secta erit in F; quare erit A C ad A F, ut A F ad F C; sed ut A F ad F C, ita est A C, ad C B; ergo erit A C ad A F, ut A C ad C B; eadem igitur recta A C ad duas A F, C B eãdem rationem habet; ideoq; A F, C B inter se æquales erunt; est autẽ F C excessus, quo A C superat A F; igitur F C excessus erit, quo majus segmentum A C superat minus C B. Cum

autem

autem, ut modo demonstravimus, sit A C ad C B, ut A F; hoc est C B ad F C, erit rectangulum contentum sub extremis; hoc est sub majori segmento A C, & sub excessu F C, quo majus segmentum A C minus superat C B æquale ei, quod a media; hoc est a minori segmento C B describitur, quadrato. Ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

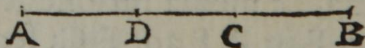
COROLLARIUM.

Sequitur ex hujus theorematis demonstratione; si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, & à majori segmento minus auferatur segmentum; majus segmentum extrema, ac media ratione quoque secari.

THEOR. XXIII. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea secta fuerit in partes inæquales, & rectangulum contentum sub majori segmento, & sub excessu, quo majus segmentum minus superat æquale fuerit quadrato minoris segmenti; recta linea extrema, ac media ratione secta erit.

Recta A B sit secta in partes inæquales in C, & rectangulum contentum sub majori segmento A C, & sub excessu D C, quo majus segmentum A C minus segmentum C B



superat æquale sit quadrato minoris segmenti C B. Dico rectam A B extrema, ac media ratione sectam esse in C. Quoniam igitur A C superat C B excessu D C, & eodem excessu D C superat rectam A D; erunt A

D, C B

D, C B æquales inter ſe; quare cum ſit A C ad C B, ut C B ad D C, (rectangulum enim ſub A C, & ſub D C quadrato ex C B eſt æquale) & A D, C B ſunt inter ſe æquales, ex demonſtratis; erit tota A C ad majus ſegmentum A D, ut majus ſegmentum A D, ad minus D C; extrema igitur, ac media ratione ſecta eſt A C in D. Eſt autem AC ad C B, ut C B; hoc eſt A D ad D C; ergo A B ſimiliter ſecta erit in C, ac ſecta eſt A C in D; atqui A C extrema, ac media ratione ſecta eſt in D; igitur A B extrema, ac media ratione quoque ſecta erit in C. Quare ſi recta linea ſecta fuerit in partes inæquales, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XXIV. PROPOS. XLIX.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit: rectangulum contentum ſub tota, & ſub exceſſu, quo majus ſegmentum minus ſuperat æquale erit ei, quod ſub majori, & minori ſegmento continetur, rectangulo.

SIt recta A B extrema, ac media ratione ſecta in C, & exceſſus, quo majus ſegmentum A C ſuperat minus C B ſit DC. Dico rectangulũ contẽtum ſub tota AB, & ſub

A D C B

exceſſu D C, quo majus ſegmẽtũ AC ſuperat minus C B æquale eſſe ei, quod ſub majori ſegmẽto A C, & ſub minori C B cõtinetur, rectangulo. Quoniã igitur, ex propoſ. 47. hujus, rectãgulũ A C D æquale eſt quadrato C B; erit AC ad C B, ut C B ad D C; ſed ut AC ad C B, ita eſt tota A B ad majus ſegmentum A C; (nam A B extrema, ac media ratione ſecta eſt in C) igitur erit ut tota A B ad majus ſegmentum A C, ita minus ſegmentum C B ad

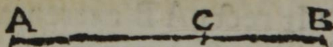
ex-

excessum D C, quo majus segmentum A C minus C B superat; ac propterea rectangulum contentum sub extremis A B, D C æquale erit ei, quod sub mediis A C, C B continetur, rectangulo. Ergo si recta linea secta fuerit extrema, ac media ratione; rectangulum contentum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXV. PROPOS. L.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit; quod sub tota, & sub majori segmento continetur rectangulum majus erit rectangulo contento sub tota, & sub minori segmento, rectangulo sub ambobus segmentis comprehenso.

Sit recta A B extrema, ac media ratione secta in C. Dico rectangulum contentum sub tota A B, & sub majori segmento A C majus esse rectangulo contento sub tota A B, & sub minori segmento C B, rectangulo contento sub ambobus segmentis A C, C B. Quoniam igitur rectangulum B A C æquale est quadrato A C, & rectangulo A C B, & est quadratũ majoris segmenti A C æquale rectangulo A B C; (cum



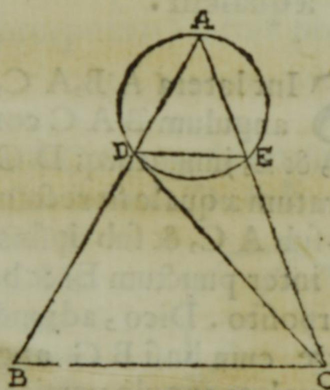
A B extrema, ac media ratione sit secta in C) erit rectangulum B A C æquale rectangulis A B C, A C B; hoc est rectangulum B A C majus erit rectangulo A B C, rectangulo A C B. Si igitur recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. XXVI. PROPOS. LI.

Si duo latera trianguli isoscelis, vel scaleni minimum angulum continentia proportionaliter secta fuerint, & quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur recta linea fecerit cum basi angulum angulo verticali æqualem; quadratum hujus lineæ æquale erit rectangulo contento, sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius inter punctum sectionis, & basim interposito.

SInt latera AB, AC, trianguli ABC, cōtinentia minimū angulum B A C, proportionaliter secta in D, & E, & recta D C, ab uno sectionum puncto D ad angulum oppositū A C B ducta, faciat cū basi B C angulum D C B æqualem angulo verticali B A C. Dico, quadratum D C æquale esse rectangulo contento sub reliquo latere A C, & sub ipsius segmento C E inter punctum E, & basim B C interposito; hoc est rectangulo A C E. Ducatur D E,



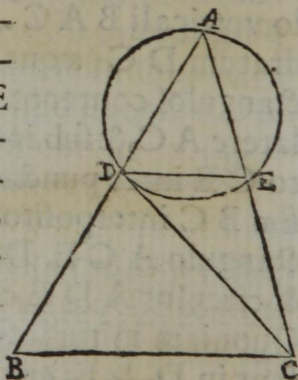
& circulus A D E circa triangulum E A D describatur. Quoniam igitur latera A B, A C proportionaliter secta sunt in D, & E; erit D E parallela basi B C; adeoq; angulus E D C angulo D C B erit æqualis; sed eidem angulo D C B æqualis est angulus D A E; ergo anguli E D C, D A E inter se æquales erunt: ac propterea C D tangens erit circulum D A E: quare quadratum D C æquale erit rectangulo A C E. Si igitur duo latera, trianguli

isoscelis, vel scaleni minimum angulum continentia secta fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXVII. PROPOS. LII.

Si duo latera trianguli isoscelis, vel scaleni, quæ sunt circa minimum angulum, proportionaliter secta fuerint, & quadratum ejus, quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur, æquale fuerit rectangulo contento sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius, quod inter punctum sectionis, & basim interponitur: recta linea adjuncta faciet cum basi angulum angulo verticali æqualem.

Sint latera A B, A C, trianguli A B C, quæ minimum angulum B A C continent proportionaliter secta in D, & E, jungaturq; D C, cujus quadratum æquale sit rectangulo contento sub A C, & sub ipsius segmento E C inter punctum E, & basim B C interposito. Dico, adjunctam D C facere cum basi B C angulum D C B æqualem angulo verticali B A C. Ducta D E, describatur circa triangulum D A E circulus E D A. Quoniam igitur A B, A C proportionaliter secta sunt in D, & E: erit D E parallela basi B C; ideoq; angulus B C D angulo C D E erit æqualis. Et quia quadratum C D æquale est rectangulo A C E; erit recta C D tangens circulum E D A: quare angulus D A E æqualis erit angulo C D E; sed eidem angulo C D E æqualem esse

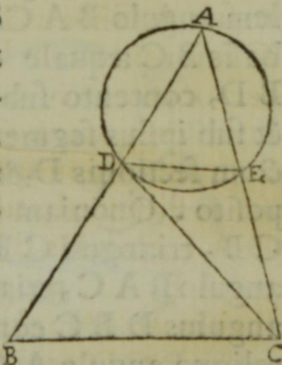


esse ostendimus angulum B C D; ergo anguli B C D, D A E inter se erunt æquales. Itaque si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni proportionaliter secta fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXVIII. PROPOS. LIII.

Si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni, quæ minimum angulum continent secta fuerint, & quæ ab uno sectionum puncto ad angulum oppositum ducitur recta linea, fecerit cum basi angulum angulo verticali æqualem, & insuper ipsius quadratum æquale fuerit rectangulo contento sub reliquo latere secto, & sub segmento ipsius inter punctum sectionis, & basim interposito: latera proportionaliter secta erunt.

LAtera A B, A C, trianguli A B C comprehendentia minimum angulum B A C sint secta in D, & E, & D C faciat cū basi B C angulū DC B æqualem angulo verticali B A C, & insuper quadratum ipsius D C æquale sit rectangulo A C E. Dico, latera A B, A C proportionaliter secta esse in D, & E. Ducatur D E, & circa triangulum A D E describatur circulus E D A. Quoniam igitur quadratum D C æquale est rectangulo A C E; erit D C tangens circulum E D A; ac proinde angulus C D E angulo D A E erit æqualis; sed eidem angulo D A E æqualis est angulus D C B; igitur anguli D C B, C D E æquales inter se erunt: itaque parallelæ sunt B C, D E inter se; quapropter D E secabit

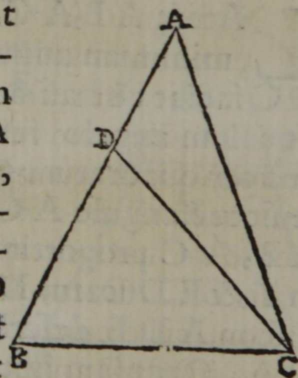


latera A B, A C proportionaliter in D, & E. Quare, si duo latera, trianguli isoscelis, vel scaleni secta fuerint, & quæ, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. XXIX. PROPOS. LIV.

In triangulo isoscele, vel scaleno, si unum eorum laterum, quæ sunt circa minimum angulum sectum fuerit, & recta linea ducta à puncto sectionis ad angulum oppositum fecerit cum basi angulum angulo verticali æqualem: quadratum basis æquale erit rectangulo contento sub latere secto, & sub ipsius segmento inter punctum sectionis, & basim interposito.

IN triangulo A B C unum laterum A B, A C, quæ circa minimum angulum B A C sunt; hoc est latus A B sit sectum in D, & recta D C faciat cum basi B C angulum D C B æqualem angulo B A C. Dico quadratum basis B C æquale esse rectangulo A B D, contento sub latere secto A B, & sub ipsius segmento D B, inter pũctum sectionis D, & basim C B interposito. Quoniam igitur angulus D C B, trianguli C B D, æqualis est angulo B A C, trianguli A C B, &



angulus D B C communis; erit reliquus angulus B D C reliquo angulo A C B æqualis: æquiangula sunt igitur triangula A B C, D B C; idcirco latera circa æquales angulos proportionalia erunt; hoc est A B ad B C, ut C B ad B D; sunt igitur tres rectæ lineæ A B, B C, B D con-

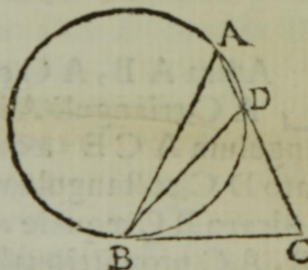
tinuè

tinuè proportionales; quare quadratum ex media; hoc eſt ex baſi B C æquale erit rectangulo A B D ſub extremis; hoc eſt ſub la tere ſecto A B, & ipſius ſegmento D B, inter punctum ſectionis D, & baſim B C interpoſito. In triangulo igitur iſoſcele, vel ſcaleno, ſi unum eorum laterum, quæ ſunt circa minimum angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXX. PROPOS. LV.

In triangulo iſoſcele, vel ſcaleno, ſi unum eorum laterum, quæ ſunt circa minimum angulum ſectum fuerit, ita ut rectangulum contentum ſub ipſo, & ſub ipſius ſegmento baſi adjacente æquale ſit baſis quadrato; recta linea à puncto ſectionis ad angulum oppoſitum ducta faciet cum baſi angulum angulo verticali æqualem.

IN triãgulo A B C unum laterum A B, B C, quæ circa minimũ angulũ B A C ſunt; hoc eſt latus A C ſit ſectũ in D, ita ut rectangulum A C D cõtentum ſub latere ſecto A C, & ſub ipſius ſegmento D C, baſi B C adjacente æquale ſit quadrato baſis B C. Dico, rectam D B continere cum baſi C B angulũ D B C angulo verticali B A C æqualem. Quoniã igitur rectangulum A C D æquale eſt quadrato B C: erit A C ad C B, ut C B ad C D: quare cum triangula A B C, B C D habeãt ãgulũ D C B cõmunẽ, & latera circa hunc ãgulũ proportionalia; hoc eſt A C ad C B, ut C B ad C D; erunt



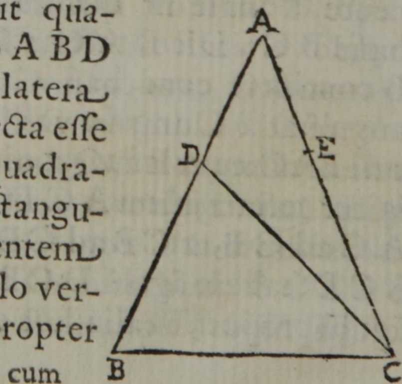
erunt ipſa æquiãgula; igitur angulus C B D angulo verticali B A C æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

Aliter. Deſcribatur circa triangulum A BD circulus B D A. Quoniã igitur rectangulũ AC D æquale eſt quadrato C B; erit C B tangens circulum B D A; idcirco angulus C B D angulo verticali B A C erit æqualis. In triangulo igitur iſoſcele, vel ſcaleno, ſi unum eorum laterum, quæ ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXI. PROPOS. LVI.

In triangulo iſoſcele, vel ſcaleno, ſi latera, quæ ſunt circa minimum angulum ſecta fuerint, ita ut rectangulum contentum ſub uno ipſorum, & ſub ſegmento ejuſdem baſi adjacente æquale fuerit quadrato rectæ lineæ, quæ à puncto ſectionis alterius lateris ad angulum oppoſitum ducitur, rectangulum vero ſub reliquo latere, & ſub ipſius ſegmento baſi adjacente æquale fuerit baſis quadrato; latera proportionaliter ſecta erunt.

Latera A B, A C continentia minimum angulum B A C, trianguli A B C, ſint ſecta in D, & E, ita ut rectangulum A C E æquale ſit quadrato D C, rectangulum vero A B D quadrato B C æquale. Dico latera A B, A C proportionaliter ſecta eſſe in D, & E. Quoniam igitur quadratum baſis B C æquale eſt rectangulo A B D; erit, per præcedentem propoſ: angulus D C B angulo verticali B A C æqualis; quapropter



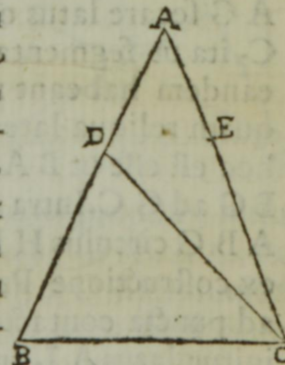
cum

cũ angulus D C B æqualis ſit angulo verticali B A C,& quadratum ex D C æquale rectangulo A C E;erunt latera A B,A C,trianguli A B C,ex propoſ.53. hujus,proportionaliter ſecta in D,& E.Itaque in triãgulo iſoſcele, vel ſcaleno, ſi latera,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXII. PROPOS. LVII.

Si duo latera, quæ ſunt circa minimum angulum trianguli iſoſcelis, vel ſcaleni proportionaliter ſecta fuerint, & quæ ab uno ſectionum puncto ad angulum oppoſitum ducitur recta linea fecerit cũ baſi angulum angulo verticali æqualem : quadratum baſis, & quadratum rectæ lineæ,quæ ab uno ſectionum puncto ad angulum oppoſitum eſt ducta eandem proportionem inter ſe habebunt, ac rectangula ſub lateribus ſectis, & ſub ſegmentis eorundem baſi adjacentibus contenta.

LAtera A B, A C circa minimum angulum B A C ſint proportionaliter ſecta in D,& E, & recta D C ab uno ſectionũ puncto D ad angulũ oppoſitum A C B ducta faciat cum baſi B C angulum D C B æqualem angulo verticali B A C. Dico, quadratum B C eandem proportionem habere ad quadratum D C, ac habet rectangulum A B D ad rectangulum ACE.Quoniã igitur,per propoſ.54.hujus,quadratũ B C æquale eſt rectãgulo A B D,& quadratum D C,per propoſ. 52. hujus, æquale eſt rectangulo A C E, erit quadratum

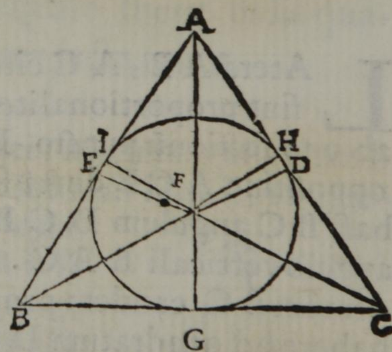


dratum B C ad rectangulum A B D, ut quadratum D C ad rectangulum A C E; & permutando quadratum B C ad quadratum D C, ut rectangulum A B D, ad rectangulum A C E. Si igitur latera, quæ ſunt circa minimum angulum trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXIII. PROPOS. LVIII.

Si duo anguli cujuſcunq; trianguli bifariam ſecti fuerint, ſecantes autem angulos rectæ lineæ, ſe mutuo ſecantes, ad latera oppoſita fuerint productæ; linea recta à reliquo angulo ad latus oppoſitum ducta, & per reliquarum interſectionem tranſiens, ſecabit ipſum in eadem ratione, ac reliqua latera inter ſe habent.

Anguli A B C, A C B, trianguli A B C, ſint bifariam diviſi à rectis B D, C E, ſe mutuo ſecantes in F, & à reliquo angulo B A C ad latus oppoſitum BC ſit ducta AG tranſiens per punctum interſectionis F. Dico, rectam A G ſecare latus oppoſitum B C, ita ut ſegmenta B G, G C eandem habeant rationem, quam reliqua latera A B, AC; hoc eſt eſſe ut B A ad A C, ita B G ad G C. Intra triangulum



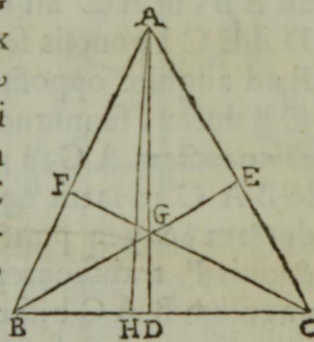
A B C circulus H I G deſcribatur, cujus centrum erit F, ex coſtructione Prop. 4. Quarti elemen: & à centro F, ad puncta contactus ducantur rectæ F H, F I. Quoniam igitur latus A I, trianguli A I F, æquale eſt lateri A H, trianguli A H F, & latus I F lateri F H, baſis vero A F com-

communis; erit angulus I A F angulo F A H æqualis; divisus est igitur bifariam angulus B A C à recta A G: quare recta A G secabit basim B C, ita ut segmenta B G, G C eandem habeant rationem inter se, ac reliqua latera B A, A C; hoc est erit ut A B ad A C, ita B G ad G C. Si igitur duo anguli cujuscunque trianguli bifariam secti fuerint, secantes autem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXIV. PROPOS. LIX.

Si tres anguli cujuscunque trianguli bifariam secti fuerint; secantes rectæ lineæ ad latera opposita productæ omnes in uno, eodēque puncto sese intersecabunt.

Sint anguli A B C, A C B, B A C, trianguli A B C, bifariam secti à rectis A D, B E, C F. Dico secantes A D, B E, C F in eodem puncto G se intersecare. Si autem aliqua ex ipsis, A D non transit per idem punctum G, ducatur A H, si fieri potest, quæ transeat per punctum G. Quoniam igitur rectæ E B, F C secant angulos A B C, A C B bifariam; recta A H, à reliquo angulo B A C ad latus oppositum B C ducta, & transiens per reliquarum intersectionem G, secabit, per, præcedentem propos: , latus B C in eadem ratione, ac reliqua latera B A, A C; ac propterea recta A H secabit angulum B A C bifariam; sed eundem angulum B A C bifariam secat recta A D; igitur angulus B A C sectus est bifariam tam à recta H A, quam à recta D A. Quod est absurdum. Non igitur A H, sed

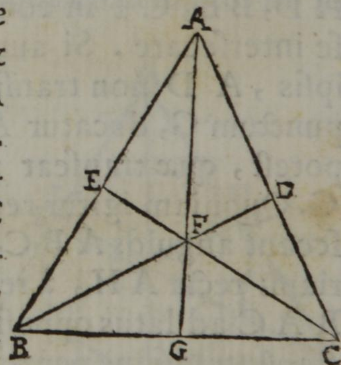


A D tranſit per punctum ſectionis G; adeoque omnes tres rectæ lineæ A D, B E, C F in eodem punctum G ſe interſecabunt. Si tres igitur anguli cujuſcunque trianguli bifariam ſecti fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXV. PROPOS. LX.

Si duo latera cujuſcunque trianguli ſecta fuerint, ita ut ſingulorum ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera, & à punctis ſectionũ ad angulos oppoſitos duæ rectæ ductæ fuerint; recta linea à reliquo angulo ad latus oppoſitum ducta, & per ſectionis punctum reliquarum tranſiens, eundem angulum bifariam ſecabit.

Sint latera A B, A C, trianguli A B C, diviſa in D, & E, ita ut ſit A D ad D C, ut A B ad B C, & A E ad E B, ut A C ad C B, & rectæ D B, E C à punctis ſectionum D, & E ad angulos oppoſitos A B C, A C B ductæ, ſe mutuo ſecent in F. Dico rectam A G, à reliquo angulo B A C ad latus oppoſitum B C ductam, & per punctum interſectionis F transeuntem, dividere angulum B A C bifariam. Quoniã igitur latus A B ſectum eſt in E in eadem ratione, ac reliqua latera A C, C B; erit angulus A C B bifariam diviſus à recta E C; eadem ratione recta D B bifariam dividet angulum A B C; quapropter recta A G à reliquo angulo B A C ad latus oppoſitum B C ducta, & per punctum ſectionis F tranſiens, dividet latus B C, per propoſ. 58. hujus, in eadem ratione, ac reliqua



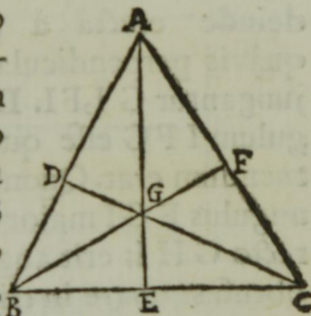
late-

latera B A, A C; Adeoq; G A angulum B A C bifariam secabit. Quare si duo latera cujuscunque trianguli secta fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XXXVI. PROPOS. LXI.

Si latera cujuscunque trianguli secta fuerint, ita ut singulorum segmenta eãdem habeant rationem, quam reliqua duo trianguli latera; rectæ lineæ à punctis sectionũ ad angulos oppositos ductæ in uno, eodemque puncto mutuo sese intersecabunt.

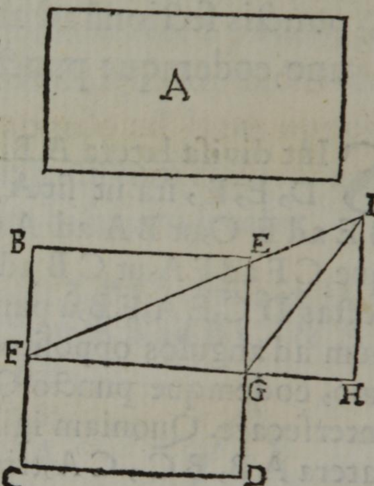
Sint divisa latera A B, B C, C A, trianguli A B C, in D, E, F, ita ut sit A D ad D B, ut A C ad C B, & B E ad E C, ut B A ad A C, & denique C F ad F A, ut C B ad B A. Dico rectas D C, E A, F B, à punctis sectionum ad angulos oppositos ductas, in uno, eodemque puncto G se mutuo intersecare. Quoniam igitur singula latera A B, B C, C A, trianguli A B C, sunt divisa, ita ut singulorum segmẽta eandem habeant rationem, quam reliqua duo ipsius trianguli latera; erunt anguli A B C, B C A, C A B divisi bifariam à rectis F B, D C, E A; adeoq; per propos: 59. hujus, rectæ F B, D C, E A in uno, eodemque puncto G se mutuo intersecabunt. Si igitur latera cujuscunque trianguli secta fuerint, ita ut &c. Quod erat demonstrandum.



PROBL. XXVI. PROPOS. LXII.

Triangulum conſtituere, ita ut quadratum unius lateris majus ſit quadratis reliquorum laterum dato rectilineo.

SIt datum rectilineum A. Oportet igitur conſtituere triangulum, ita ut quadratum unius lateris ipſius majus ſit quadratis reliquorum laterum rectilineo A. Quadratum B C D E ſit rectilineo A æquale, & diviſo latere B C bifariam in F, agatur F G parallela B E, quæ producatur in H, ita ut G H æqualis ſit G E, deinde erectâ à puncto H quâvis perpendiculari H I, adjungantur G I, F I. Dico triangulum I F G eſſe quod conſtituendum erat. Quoniam igitur angulus F G I major eſt angulo recto G H I; erit angulus F G I obtuſus; quare in triangulo obtuſangulo I F G quadratum lateris I F, obtuſum ãgulum F G I ſubtendentis, majus erit quadratis reliquorum laterum F G, G I duplo rectanguli F G H, eſt autem G E æqualis rectæ G H; igitur quadratum F I majus erit quadratis F G, G I duplo rectanguli F E; hoc eſt quadrato B D; atqui quadrato B D æquale eſt rectilineum A; igitur quadratum F I majus erit quadratis F G, G I rectilineo dato A. Triangulum igitur conſtitutum eſt, ita ut quadratum unius lateris, &c. Quod erat faciendum.

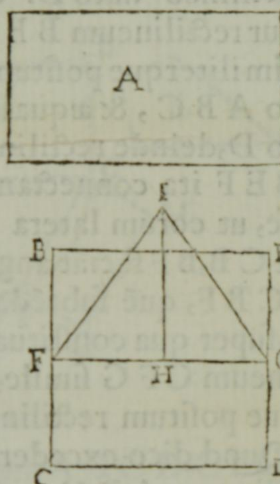


PROBL.

PROBL. XXVII. PROPOS. LXIII.

Triangulum constituere, ita ut quadratum unius lateris minus sit quadratis reliquorum laterum dato rectilineo.

OPortet constituere triangulum, ita ut quadratum unius lateris minus sit quadratis reliquorum laterum tectilineo A. Fiat quadratũ B C D E rectilineo A æquale,& diviso latere B C bifariam in F, ducatur à puncto F recta F G parallela B E, ex qua abscindatur G H æqualis rectæ G E, deinde à puncto H erectâ quâvis perpendiculari H I, adjungantur G I, F I. Dico, triangulum I F G esse quod quæritur. Quoniam igitur angulus rectus F H I major est angulo I G F; erit angulus I G F acutus; ideo in triangulo I F G quadratum lateris F I, acutum angulum I G F subtendentis, minus erit quadratis reliquorum laterum F G,G I duplo rectanguli F G H; est autem H G æqualis rectæ G E; igitur quadratum F I minus erit quadratis F G,G I duplo rectanguli F E; hoc est quadrato B D, quod cum sit rectilineo A æquale: erit quadratum lateris F I, trianguli I F G, minus quadratis reliquorum laterum F G,G I rectilineo dato A. Constitutum est igitur triangulum, ita ut quadratum unius lateris minus,&c. Quod efficiendum erat.



PROBL.

PROBL. XXVIII. PROPOS. LXIV.

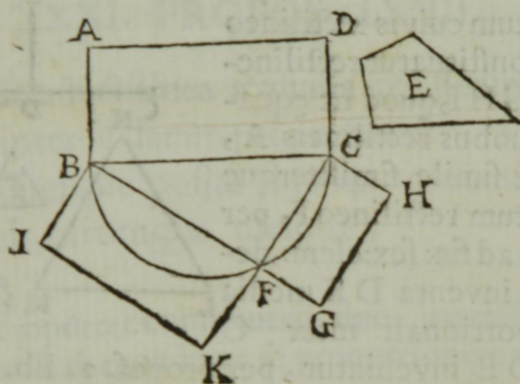
Dato rectilineo rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum conſtituere, quod excedat datum altero dato rectilineo.

Rectilineo A B C conſtituendum ſit rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, & excedens idem A B C rectilineo dato D. Conſtituatur rectilineum B E F ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo A B C, & æquale rectilineo D, deinde rectilinea A B C, B E F ita connectantur inter ſe, ut eorum latera homologa C B, B F faciãt angulũ rectũ C B F, quẽ ſubtẽdat recta F C, ſuper qua conſtituatur rectilineum C F G ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo A B C. Quod dico excedere idem rectilineum A B C rectilineo dato D. Quoniam igitur rectilineum C F G æquale eſt rectilineis A B C, B E F, & rectilineum B E F æquale eſt rectilineo D; erit rectilineum C F G æquale rectilineis A B C, & D; hoc eſt rectilineum C F G excedet rectilineũ A B C ſimile, ſimiliterque poſitum, dato rectilineo D. Dato igitur rectilineo rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum conſtitutum eſt, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. XXIX. PROPOS. LXV.

Dato rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constituere, deficiens ab eo altero rectilineo dato.

Constituendum est rectilineum simile, similiterque positum rectilineo A B C D, & deficiens ab eo altero rectilineo dato E. Super latere B C describatur semicirculus B F C, & constituto rectilineo C F G H simili, similiterque posito rectilineo A B C D, & æquali

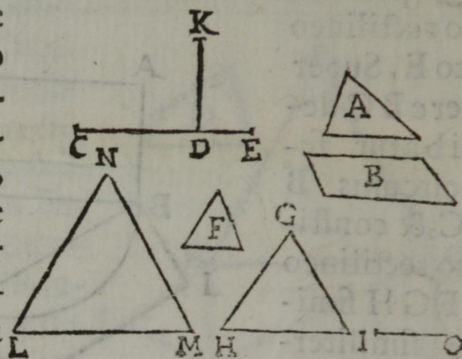


rectilineo D, connectantur rectilinea A B C D, C F G H, itaut latus C F, homologum lateri B C, accommodatum sit in semicirculo B F C, adjungaturque B F, super qua constituatur rectilineum B I K F simile, similiterque positum rectilineo A B C D. Quod dico deficere ab ipso A B C D rectilineo E. Quoniam igitur angulus B F C, trianguli B C F, rectus est; erit rectilineum A B C D æquale rectilineis B I K F, C F G H; igitur ablato rectilineo C F G H; deficiet rectilineum B I k F, quod simile, similiterque positum est rectilineo A B C D, ab eodem A B C D rectilineo C F G H; hoc est rectilineo E. Dato igitur rectilineo rectilineum simile, similiterque positum constitutum est, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. XXX. PROPOS. LXVI.

Rectilineum constituere, quod habeat ad duo data rectilinea datam proportionem, & simile sit, similiterque positum cuivis dato rectilineo.

Oporteat constituere rectilineum, quod habeat ad rectilinea A, B proportionem rectæ C D ad D E, & simile sit, similiterque positum cuivis rectilineo F. Constituatur rectilineum G H I, quod sit æquale duobus rectilineis A, B, & simile similiterque positum rectilineo F, per scol: ad fin: sex: elem:, deinde inventa D K media proportionali inter C D, D E, inveniatur, per propos. 2. lib. 7. colle: Pappi, quarta L M, quæ sit ad tertiam H I, ut prima C D ad secundã D K, & super recta L M constituatur rectilineũ L M N simile, similiterque positum rectilineo F. Quod, dico habere ad duo rectilinea A, B datã proportionem rectæ C D ad D E. Tribus rectis lineis D K, D E, H I inveniatur quarta proportionalis I O; hoc est sit ut D k ad D E, ita H I ad I O. Quoniam igitur est ut C D ad D k, ita L M ad H I, & ut D k ad D E; ita H I ad I O: erit ex æqualitate ut C D ad D E, ita L M ad I O. Cum autem sit ut C D ad D K, ita L M ad H I, & ut eadem C D ad D K, ita D k ad D E; (nam C D, D K, D E continuè sunt proportionales) erit ut D K ad D E; ita L M ad H I; est autem D K ad D E, ut H I ad I O; ergo erit L M ad H I, ut H I ad I O. Continuè sunt igitur propor-



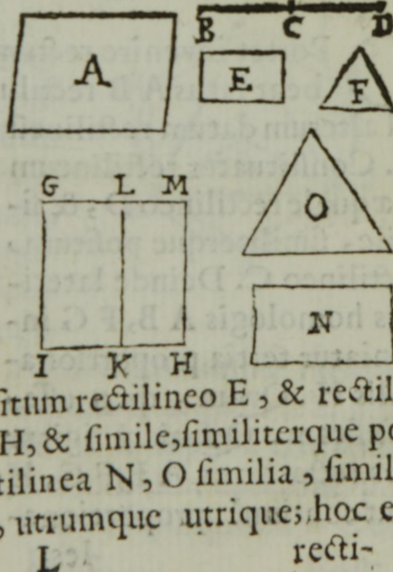
tio-

tionales L M, H I, I O; quare erit rectilineum N L M super prima L M ad rectilineum G H I super secunda H I constitutum, ut prima L M ad tertiam I O: sed ut L M ad I O, ita est (ut modo demonstravimus) C D ad D E; ergo igitur erit rectilineum N L M, quod est simile, similiterque positum rectilineo F, ad rectilineum G H I; hoc est ad duo rectilinea A, B, ut C D ad D E. Constitutum est igitur rectilineum habens ad duo data rectilinea, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXI. PROPOS. LXVII.

Dato rectilineo duo rectilinea æqualia constituere; quæ habeant inter se datam proportionem, & sint similia, similiterque posita duobus quibuslibet datis rectilineis, utrumque utrique.

Rectilineo A oportet constituere duo æqualia rectilinea, quæ habeant inter se proportionem rectæ B C ad C D, & sint similia, similiterque posita rectilineis E, F, utrumque utrique. Fiat quadratum G H rectilineo A æquale, & secto latere I H in K, ita ut sit I K ad K H, ut B C ad C D, ducatur K L parallela H M. Deinde cõstituãtur rectilineum N æquale rectilineo I L, & simile, similiterque positum rectilineo E, & rectilineum O æquale rectilineo L H, & simile, similiterque positum rectilineo F. Dico rectilinea N, O similia, similiterque posita rectilineis E, F, utrumque utrique; hoc est

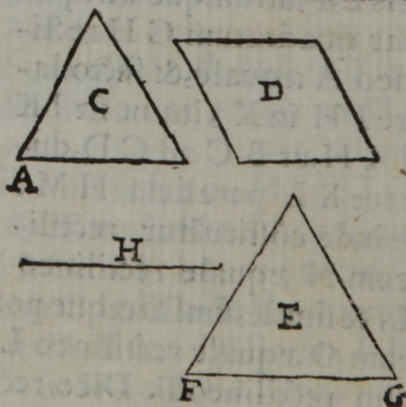


rectilineum N rectilineo E, rectilineum vero O rectilineo F, æqualia esse simul rectilineo dato A, & habere inter se proportionẽ rectæ B C ad C D. Quoniam igitur rectilinea N, O æqualia sunt rectilineis I L, L H; hoc est quadrato G H, & eidem quadrato G H æquale est rectilineum A; erunt rectilinea N, O æqualia rectilineo A. Cum autem sit rectilineum N æquale rectilineo G K, & rectilineum O rectilineo L H æquale; erit ut rectilineum N ad rectilineum G K, ita rectilineum O ad rectilineum L H; adeoque permutando erit, ut G K ad L H, ita N ad O; sed ut G K ad L H, ita est recta I K ad K H; hoc est B C ad C D; ergo erit ut B C ad C D, ita rectilineum N ad rectilineũ O. Dato igitur rectilineo constituta sunt duo rectilinea, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. XXXII. PROPOS. LXVIII.

Rectam lineam invenire, ad quam ita se habeat latus dati rectilinei, ut est idem rectilineum ad alterum rectilineum datum.

Oportet invenire rectam lineam, ad quam ita se habeat latus A B rectilinei C, ut est rectilineum C ad alterum datum rectilineũ D. Constituatur rectilineum E æquale rectilineo D, & simile, similiterque positum rectilineo C. Deinde lateribus homologis A B, F G inveniatur tertia proportionanalis H. Quam, dico esse quæsitam. Quoniam igitur tres rectæ lineæ A B, F G, H sunt continuè proportionales;

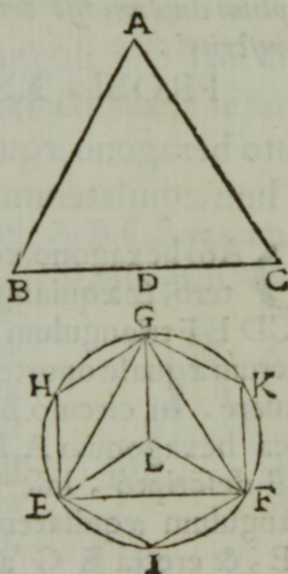


les; erit ut rectilineum C super prima A B ad rectilineum E super secunda F G; hoc est ad rectilineum D, ita prima A B ad tertiam H. Ergo rectam lineam invenimus, ad quam ita se habet, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. XXXIII. PROPOS. LXIX.

Dato triangulo æquilatero hexagonum æquilaterum, & æquiangulum æquale constituere.

TRiangulo æquilatero A B C hexagonum æquilaterum, & æquiangulum æquale est constituendum. Dividatur B C bifariam in D, inveniaturque E F media proportionalis inter B C, & C D, super qua triangulum æquilaterum E F G constituatur, & in circulo H I K, circa triangulum E F G descripto, inscribatur hexagonum G H E I F K æquilaterum, & æquiangulum. Quod, dico triangulo æquilatero A B C esse æquale. Ab angulis G, E, F ad centrum L ducãtur G L, E L, F L. Quoniam igitur latera H G, H E, trianguli H E G, æqualia sunt lateribus L G, L E, trianguli L E G, utrumq; utrique, & basis G E communis; erit triangulum H E G triangulo L E G æquale. Eademque ratione triangula E I F, F K G æqualia erunt triangulis L E F, L F G; adeoq; hexagonum G H E I F K duplum erit trianguli G E F. Cum autem B C, E F, B D sint continuè proportionales; erit triangulum B C A super prima B C cõ-



ſtitutũ,ad triangulum E F G ſuper ſecunda E F conſtitutum,ut prima B C ad tertiam B D; atqui B C dupla eſt ipſius B D; igitur triangulum A B C duplum erit triãguli E F G; ſed ejuſdem trianguli E F G duplum eſſe demonſtravimus hexagonum G H E I F K; igitur hexagonum G H E I F K æquilaterum, & æquiangulum, & triangulum æquilaterum A B C inter ſe erunt æqualia. Dato igitur triangulo æquilatero factum eſt, &c. Quod erat faciendum.

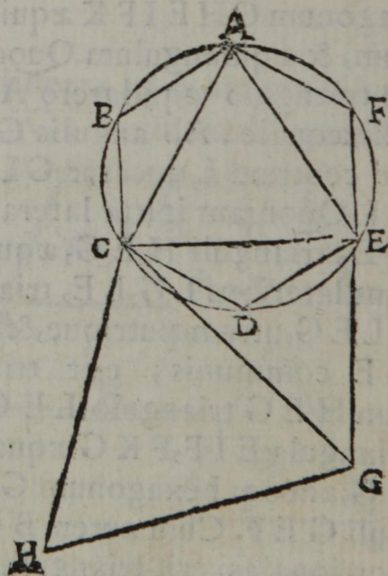
COROLLARIUM.

EX hujus propoſitionis demonſtratione conſtat, hexagonum æquilaterum, & æquiangulum in circulo inſcriptum duplum eſſe trianguli æquilateri in eodem circulo inſcripti.

PROBL. XXXIV. PROPOS. LXX.

Dato hexagono æquilatero, & æquiangulo triangulum æquilaterum æquale conſtituere.

DAto hexagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E F triangulum æquilaterum æquale oportet conſtituere. In circulo B D F, circa hexagonum A B C D E F deſcripto, inſcribatur triangulum æquilaterum A C E, & erectâ E G ad C E perpendiculari, quæ æqualis ſit ipſi C E, adjungatur C G, ſuper qua triangulum æquilaterum C G H conſtituatur. Quod dico hexagono A B C D E F eſſe æquale. Quoniam igitur triangulum C E G eſt rectan-

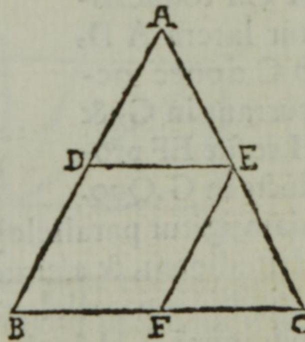


rectangulum ; erit triangulum æquilaterum super C G æquale triangulis æquilateris super C E , E G, quæ cum sint inter se æqualia, ob æqualitatem basium C E, E G ; erit triangulum C G H duplum trianguli C E A ; sed ejusdem trianguli C E A duplum est , per coroll: præcedẽtis propos:,hexagonũ A B C D E F;ergo hexagonũ A B C D E F æquilaterum,& æquiangulum, & triangulum æquilaterum C G H inter se erunt æqualia. Dato igitur hexagono æquilatero,& æquiangulo factum est,&c.Quod erat faciendum .

THEOR. XXXVII. PROPOS. LXXI.

Si duo latera cujuscunque trianguli bifariam dividantur ; recta linea ad puncta sectionum adjuncta æqualis erit dimidiæ basis .

Sint latera A B , A C, trianguli A B C,bifariam divisa in D , & E. Dico rectam D E æqualem esse dimidiæ basis B C . Ducatur E F parallela rectæ A B. Quoniam igitur E F parallela est rectæ A B ; erunt latera C A , C B proportionaliter divisa in E, & F; sed A C divisa est bifariam in E; igitur C B bifariam in F divisa erit . Cum autem A B, A C divisa sint proportionaliter in D, & E; erit D E parallela rectæ B F ; in quadrilatero igitur D B F E latera opposita sunt parallela;quare parallelogrammum erit; ideo latus D E opposito lateri B F erit æquale; hoc est dimidiæ basis B C.Nam basis B C,ex demõstratis bifariã divisa est in F. Si igitur duo latera cujuscũque triãguli

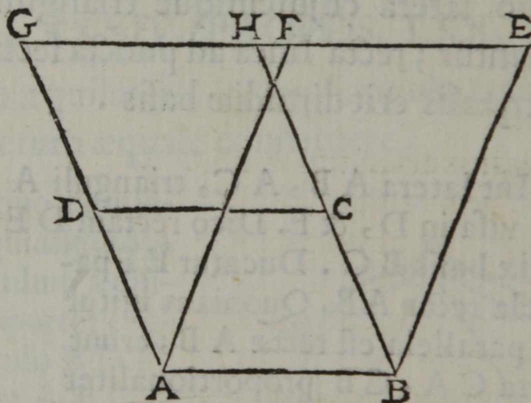


guli bifariam dividantur, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XXXVIII. PROPOS. LXXII.

Si duo parallelogramma ſuper eadem baſi fuerint cõſtituta, altitudo vero unius dupla fuerit altitudinis alterius; parallelogrammum, quod duplam habet altitudinem duplum erit alterius parallelogrammi.

SInt ſuper eadem baſi A B duo parallelogramma A B C D, A B E F conſtituta, & altitudo parallelogrammi A E dupla ſit altitudinis parallelogrammi A C. Dico parallelo grammũ A E duplum eſſe parallelogrami A C. Producantur latera A D, B C donec occurrant in G, & H rectæ EF productę in G. Quo-



niam igitur parallelogramma A E, A H eandem habent altitudinem, & altitudo parallellogrammi A E dupla eſt altitudinis parallelogrammi A C; erit altitudo parallelogrammi A H dupla altitudinis parallelogrammi A C; adeoque altitudo parallelogrammi D H æqualis erit altitudini parallelogrami A C; quare parallelogramma A C, D H ita ſe habebunt, ut baſes A B, D C; atqui baſes A B, D C ſunt inter ſe æquales; igitur parallelogramma

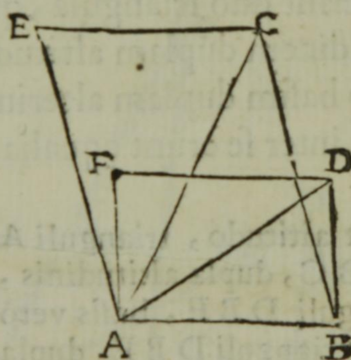
A C,

A C, D H æqualia inter ſe erunt; ideo totum parallelogrãmum A H duplum erit parallelogrammi A C. Eſt autem parallelogrammum A E æquale parallelogrammo A H; ergo parallelogrammum A E duplum erit etiam parallelogrammi A C. Si igitur duo parallelogramma ſuper eadem baſi fuerint conſtituta, altitudo vero unius, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. XXXIX. PROPOS. LXXIII.

Si duo triangula ſuper eadem baſi fuerint conſtituta, altitudo vero unius dupla fuerit altitudinis alterius: triangulum quod duplam habet altitudinem alterius trianguli duplum erit.

Super eadem baſi A B ſint cõſtituta duo triangula A B C, A B D, & altitudo trianguli A B, C ſit dupla altitudinis, trianguli A B D. Dico triangulum A B C duplum eſſe trianguli A B D. Ex A B, & B C deſcribatur parallelogrãmum A B C E, & ſimiliter ex A B, B D parallelogrãmum A B D F. Quoniam igitur parallelogrãmum A C duplum eſt triauguli A B C, & duplum etiam eſt parallelogrãmi B F, ex præcedente propoſ.; erunt triangulum A B C, & parallelogrammum B F inter ſe æqualia; eſt autem parallelogrãmum B F duplum trianguli A B D; ergo triangulum A B C duplum erit ejuſdem trianguli A B D. Si igitur duo triangula ſuper eadem baſi fuerint conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



CO-

COROLLARIUM.

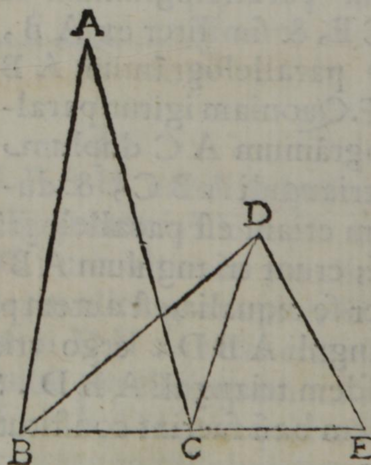
EX hujus thorematis demonstratione constat, si triangulum, & parallelogrammum super eadem basi fuerint constituta, & altitudo trianguli fuerit dupla altitudinis parallelogrammi; triangulum, & parallelogrammum inter se esse æqualia.

SCOLIUM.

QUod si in duobus præcedentibus propositionibus tam duo parallelogramma, quam duo triangula super æqualibus basibus fuerint constituta idem sequitur, eademque fere est demonstratio.

THEOR. XL. PROPOS. LXXIV.

Si fuerint duo triangula, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius, alterum vero basim duplam alterius basis: hæc duo triangula inter se erunt ęqualia.



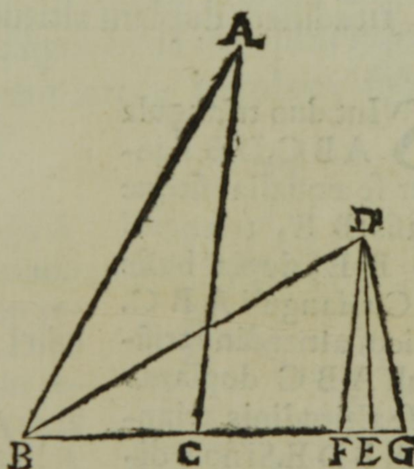
SIt altitudo, trianguli A B C, dupla altitudinis, trianguli D B E, basis verò B E, trianguli D B E, dupla sit basis B C, trianguli A B C. Dico triangula A B C, D B E inter se esse æqualia. Ducatur D C. Quoniam igitur altitudo trianguli A B C, dupla est altitudinis trianguli D B C, & sunt super eadem basi

basi B C constituta; erit, per præcedentem propos:, triangulum A B C duplum triãguli D B C; sed ejusdem triãguli D B C duplum est triangulum D B E: (basis enim B E dupla est basis B C) igitur triangula A B C, D B E inter se erunt æqualia. Quare si fuerint duo triangula, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XLI. PROPOS. LXXV.

Si fuerint duo triangula inter se æqualia, quorum unum habeat altitudinem duplam altitudinis alterius; triangulum quod subduplam habet altitudinem, habebit basim duplam basis alterius.

Sint triangula A B C, D B E inter se æqualia, altitudo vero trianguli A B C dupla sit altitudinis trianguli D B E. Dico, basim B E duplam esse basis B C. Si non dicatur dupla, vel est duplâ major, vel duplâ minor. Sit prius major duplâ. Ex B E, quæ major est duplâ basis B C, abscindatur B F, quę dupla sit BC, jungaturq; D F. Quoniam igitur altitudo, trianguli A B C, du-

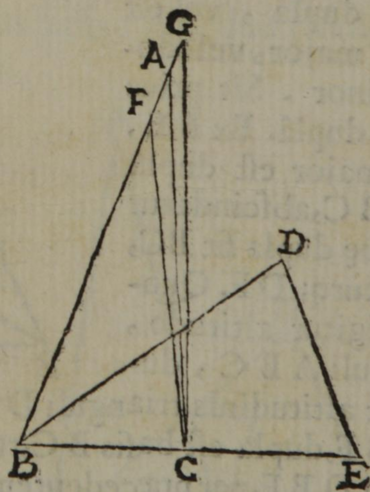


pla est altitudinis trianguli D B F, & basis B F, trianguli D B F, dupla est basis B C, trianguli A B C; erit triangulum D B F, per præcedentem propos:, æquale triangulo A B C; sed eidem triangulo A B C æquale est triangulum D B E; igitur triangula D B F, D B E inter se

erunt æqualia, pars toti. Quod eſt abſurdum. Sit deinde minor duplâ. Producatur igitur B E in G, ita ut B G dupla ſit baſis B C, ducaturque D G. Triangulum D B G, per præcedentem, æquale eſt triangulo A B C, & eidem triangulo A B C æquale eſt triangulum D B E; ergo triangula D B G, D B E inter ſe erunt æqualia, pars toti. Quod eſt abſurdum. Itaque baſis B E nec eſt duplâ major, nec duplâ minor, ſed dupla baſis B C. Si igitur fuerint duo triangula inter ſe æqualia, quorum unũ habeat altitudinem duplam, &c. Quod oſtendendũ erat.

THEOR. XLII. PROPOS. LXXVI.

Si fuerint duo triangula inter ſe æqualia, quorum unum habeat baſim duplam baſis alterius; triangulum quod ſubduplam habet baſim habebit altitudinem duplam altitudinis alterius.

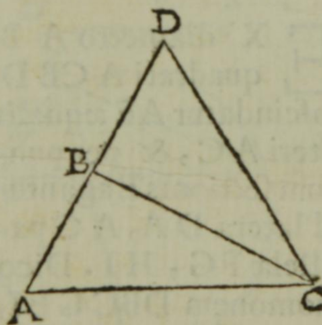


Sint duo triangula A B C, D B E inter ſe æqualia, ſitque baſis B E, trianguli D B E, dupla baſis B C, trianguli A B C. Dico, altitudinẽ triãguli A B C duplam eſſe altitudinis trianguli B D E. Si non dicatur dupla erit, vel duplâ major, vel duplâ minor. Sit prius duplâ major. Sumatur B F ex recta B A, jungaturq; F C, ita ut altitudo, trianguli F B C, dupla ſit altitudinis, tri-

trianguli D B E.Erunt igitur,per 74.propoſ;hujus,triangula F B C,D B E inter ſe æqualia;eſt autem triangulum A B C æquale eidē triãgulo D B E;igitur triãgula ABC, F B C æqualia inter ſe erunt.Quod eſt abſurdū,pars toti.Sit deinde duplâ minor.Fiat triangulum G B C,ita ut ipſius altitudo dupla ſit altitudinis,triãguli D B E.Quare triangulum G B C,ex eadem 74.propoſ:hujus, æquale erit triangulo D B E,& eidem triãgulo D B E æquale eſt triangulum A B C;ergo triangula A B C,G B C inter ſe erunt æqualia, pars toti. Quod eſt abſurdum . Altitudo igitur trianguli A B C, nec eſt duplâ major, nec minor duplâ:ſed dupla altitudinis triãguli D B E. Quare ſi fuerint duo triangula inter ſe æqualia,quorū unum habeat baſim duplam, &c.Quod probandum erat .

THEOR. XLIII. PROPOS. LXXVII.

In triangulo rectangulo , ſi unus acutorum angulorum duplus fuerit reliqui: latus angulum rectum ſubtendens duplum erit lateris angulum ſubduplum ſubtendentis.

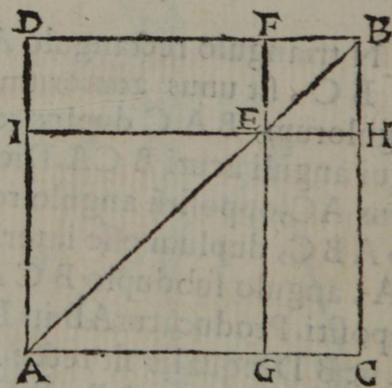


IN triangulo rectangulo A B C , ſit unus acutorum angulorum, B A C duplus reliqui anguli acuti B CA.Dico latus AC,oppoſitū angulo recto A B C, duplum eſſe lateris B A , angulo ſubduplo B C A oppoſiti. ProducaturAB in D, ita ut B D æqualis ſit rectæ A B, jungaturq; D C. Quoniam igitur latera A B , B C , trianguli A B C,æqualia ſunt lateribus D B, B C , trianguli D B C , utrumque utri-

utrique, & angulus A B C angulo D B C æqualis; erit basis A C basi C D æqualis, & angulus B C A angulo B C D æqualis. Quare totus angulus D C A duplus erit anguli B C A; sed ejusdem anguli B C A duplus est, ex hypothesi, angulus B A C; ergo anguli D C A, B A C inter se æquales erunt; ideoq; latus D A lateri D C erit æquale; Est autem eidem lateri D C æquale latus A C, ex demõstratis; igitur latera A C, A D inter se erunt æqualia; Atqui latus D A duplũ est lateris B A; (nã B D, B A inter se sunt æquales) igitur latus A C ejusdẽ lateris B A erit duplum. Itaque in triangulo rectangulo, si unus acutorum angulorum, &c. Quod probandum erat.

THEOR. XLIV. PROPOS. LXXVIII.

Si ex diametro quadrati abscissa fuerit pars æqualis lateri ejusdem quadrati, & per punctum sectionis duæ paralleæ ad latera ductæ fuerint; Gnomon in quo minus quadratum existit reliquo quadrato erit æqualis.



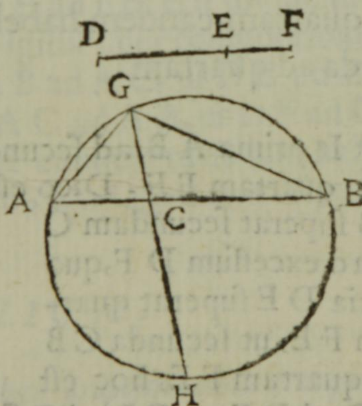
Ex diametro A B, quadrati A CB D, abscindatur AE æqualis lateri A C, & per punctum sectionis E agantur ad latera D A, A C parallelæ F G, H I. Dico gnomonem DBCGEI, in quo minus quadratum E B existit, æqualem esse reliquo quadrato A E. Quoniam igitur A C, A E inter se sunt æquales; erunt

erunt quadrata ipsarum inter se æqualia; sed quadratum ex A E duplum est quadrati lateris A G: igitur quadratum rectæ A C; hoc est quadratum A C B D duplum erit quadrati lateris AG; hoc est quadrati A G E I. Quapropter quadratum A G E I pars dimidia erit quadrati A C B D; ergo altera medietas erit gnomon D B C G E I; igitur gnomon D B C G E I quadrato A G E I erit æqualis. Si igitur ex diametro quadrati abscissa fuerit pars æqualis lateri, &c. Quod erat probandum.

PROBL. XXXV. PROPOS. LXXIX.

Data recta linea secta utcunque, per ipsius sectionis punctum rectam lineam ducere, cujus segmenta sint reciproca segmentis datæ rectæ lineæ, habeantque datam proportionem.

SIt data recta linea A B, utcunque secta in C. Oportet igitur per punctum sectionis C rectam lineam ducere, cujus segmenta sint reciproca segmentis A C, C B, datæ rectæ A B, habeantq; proportionē datam rectæ D E ad E F. Inveniatur tribus rectis lineis D E, E F, A C vel, C B, quarta proportionalis C G; hoc est sit D E ad E F, ut B C ad C G, & adjunctis B G, A G, describatur, circa triangulū A B G, circulus A H B G, & G C producatur in H. Dico segmenta H C, C G, rectæ G H, reciproca esse segmentis A C, C B, rectæ A B, & ha-

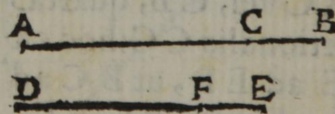


habere proportionem rectæ D E ad E F. Quoniam igitur in circulo A G B H, duæ rectæ A B, G H sese mutuo secant in C; erit rectangulum comprehensum sub segmentis B C, C A, rectæ A B, æquale rectangulo contento sub segmentis H C, C G, rectæ G H; adeoq; erit, ut B C ad C G, ita H C ad C A: sunt igitur segmenta H C, C G reciproca segmentis, A C, C B. Quod autem proportionem habeant inter se, ac recta D E ad E F, est manifestum. Demonstravimus enim esse H C ad C A, ut B C ad C G; sed B C ad C G est, ut D E ad E F; ergo H C ad C A erit, ut D E ad E F. Segmenta igitur H C, C G, A C, C B sunt inter se reciproca, & datam habent proportionē rectæ D E, ad E F. Data igitur recta linea utcunq; secta, factum est, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. XLV. PROPOS. LXXX.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; excessus, quo prima superat secundam, ad excessum, quo tertia superat quartam, eandem habebit rationem, quam secunda ad quartam.

Sit prima A B ad secundam C B, ut tertia D E ad quartam F E. Dico esse excessum A C, quo prima A B superat secundam C B, ad excessum D F, quo tertia D E superat quartam F E, ut secunda C B ad quartam F E; hoc est A C ad D F, ut C B ad F E. Quoniam igitur est A B ad C B, ut D E ad E F; erit dividendo A C ad C B, ut D F ad F E, & permutando A C ad D F, ut C B ad F E.



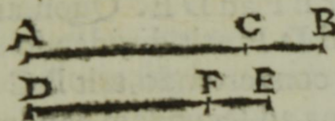
Qua-

Quapropter si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. XLVI. PROPOS. LXXXI.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: excessus, quo prima superat secundam, eandem habebit rationem ad primam, quam excessus, quo tertia superat quartam, ad tertiam.

SIt prima A B ad secundam C B, ut tertia D E ad quartam F E. Dico esse excessum A C, quo prima A B superat secundam C B, ad primam A B, ut excessus D F, quo tertia D E superat quartam F E, ad tertiam D E; hoc est A C ad A B, ut D F ad D E. Quoniam igitur est A B ad C B, ut D E ad F E; erit dividendo A C ad C B, ut D F ad F E; igitur, per compositionem rationis contrariam, erit A B ad A C, ut D E ad D F: ac proinde invertendo erit A C ad A B, ut D F ad D E. Si igitur prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIUM.

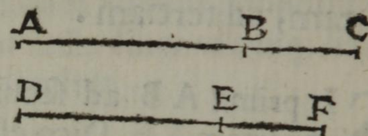
IN his duabus præcedentibus propositionibus, ut perspicuum est, antecedens proportionis debet superare consequentem, ut sumi possit excessus, cujus habetur consideratio.

THEOR.

THEOR. XLVII. PROPOS. LXXXII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; erit exceſſus, quo ſecunda ſuperat primam, ad primam, ut exceſſus, quo quarta ſuperat tertiam, ad tertiam.

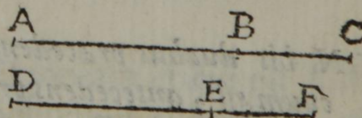
SIt prima A B ad ſecundam A C, ut tertia D E ad quartam D F. Dico exceſsum B C, quo ſecunda A C ſuperat primam A B, eſſe ad primam A B, ut exceſſus E F, quo quarta D F ſuperat tertiam DE, ad tertiam D E; hoc eſt B C ad A B, ut E F ad D E. Quoniam igitur eſt A B ad A C, ut D E ad D F; erit dividendo A B ad B C, ut D E ad E F; igitur, convertendo, erit B C ad A B, ut E F ad D E; Quare ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quã tertia, &c. Quod erat probandum.



THEOR. XLVIII. PROPOS. LXXXIII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: erit exceſſus, quo ſecunda ſuperat primam, ad ſecundam, ut exceſſus, quo quarta ſuperat tertiam, ad quartam.

SIt prima AB ad ſecundam A C, ut tertia D E ad quartam D F. Dico exceſſum B C, quo ſecunda A C ſuperat primam A B, eſſe ad ſecundam A C, ut exceſſus E F, quo quarta D F ſuperat



perat

perat tertiam D E, ad quartam D F; hoc eſt B C ad A C, ut E F ad D F. Quoniam igitur A B eſt ad A C, ut D E ad D F; erit dividendo A B ad B C, ut D E ad E F, & componendo erit A C ad B C, ut D F ad E F; ergo, e contrario erit B C ad A C, ut E F ad D F. Itaque ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod demonſtrare oportebat.

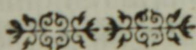
SCHOLIUM.

Porro perſpicuum eſt in his duabus præcedentibus propoſitionibus conſequentem debere eſſe majorem antecedente, ut ſumi poſſit exceſſus, quo conſequens ſuperat antecedentem.

LEMMA.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inęquales quarum major dupla ſit minoris; quadratum majoris duplum erit rectanguli ſub utraque contenti.

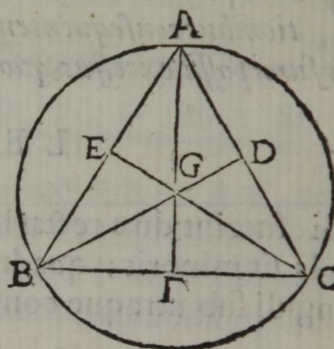
Sit recta A B dupla rectæ B C. Dico quadratum ex A B duplum eſſe rectanguli ſub A B, B C contenti. Quoniam igitur quadratum ex A B, & rectangulum ſub A B, B C eandem baſim habent A B, & quadratum ex A B altitudinem habet A B duplam altitudinis B C, rectanguli A B C; erit per prop; 72. hujus, quadratum A B duplum rectanguli A B C. Quod demonſtrandum erat.



THEOR. XLIX. PROPOS. LXXXIV.

Rectangulum contentum ſub latere trianguli æquilateri,& ſub ipſius dimidia æquale eſt rectangulis contentis ſub ſegmentis perpendicularium,ab angulis ad oppoſita latera,cadentium.

AB angulis A B C, B C A, C A B,trianguli æquilateri A B C,cadant ad latera oppoſita A C, A B, B C perpendiculares B D,C E,AF,quæ,quia ſecant angulos à quibus ſunt ductæ bifariam, ſe mutuo ſecabunt, in G,per propoſ:59.hujus.Dico rectangulum contentum ſub latere A B,trianguli æquilateri A B C, & ſub ipſius dimidia B E æquale eſſe rectāgulis contentis ſub ſegmētis A G, G F, B G, G D, C G, G E,perpendicularium A F, B D,C E;hoc eſt rectangulū A B E æquale eſſe rectāgulis A G F,B G D,C G E.Circa triangulum A B C circulus deſcribatur C B A. Quoniā igitur,per coroll:prop:18.lib.14.AG dupla eſt rectæ GF; erit,per præcedēs lemma,quadratū A G duplum rectanguli A G F, &,per idem lemma,quadratum A B duplum rectanguli ABE;eſt autē quadratum AB,per prop:12.lib. 13. triplum quadrati A G; ergo rectangulum A B E rectanguli A G F triplum erit; hoc eſt æquale tribus rectangulis A G F, B G D, C G E. Itaque rectangulum contentum ſub latere trianguli æquilateri, & ſub ipſius dimidia æquale eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

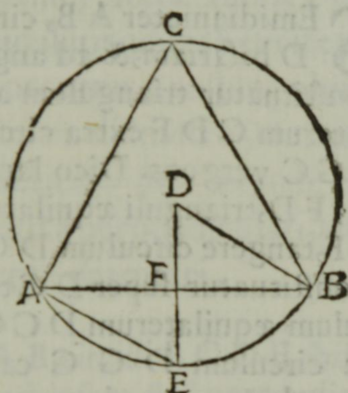


THEOR.

THEOR. L. PROPOS. LXXXV.

Recta linea in circulo accommodata ſecans ſemidiametrum ejuſdem bifariam, & ad angulos rectos, erit latus trianguli æquilateri in eodem circulo inſcripti.

Recta A B in circulo A B C accommodata ſecet ſemidiametrum D E bifariam in F, & ad angulos rectos. Dico A B eſſe latus trianguli æquilateri in circulo ABC inſcripti. Adjũgantur rectæ A E, D B, & diviſo arcu A C B bifariam in C, jungantur rectæ A C, B C. Quoniam igitur duo latera A F, F E, trianguli A F E, æqualia ſunt duobus lateribus B F, F D, trianguli B F D, utrũque utrique, angulus vero A F E angulo B F D æqualis; erit A E ſemidiametro D B æqualis. Quare A E latus erit hexagoni æquilateri, & æquianguli in circulo A B C inſcripti; ergo arcus A E eſt pars ſexta circuli A B C; ſed arcus E B æqualis eſt arcui A E; igitur totus arcus A E B duæ ſextæ partes erit; hoc eſt pars tertia circuli A B C; ergo reliquæ duæ tertiæ partes, erit arcus A C B, qui cum ſit bifariam diviſus in C; erit uterq; arcus A C, C B tertia pars circuli A B C; Diviſa eſt, igitur circumpherentia C B A, circuli A B C in tres arcus A B, B C, C A inter ſe æquales; ac proinde rectæ A C, C B, BA ipſis ſubtenſæ inter ſe æquales erunt; triangulum igitur A C B eſt æquilaterum. Itaque recta

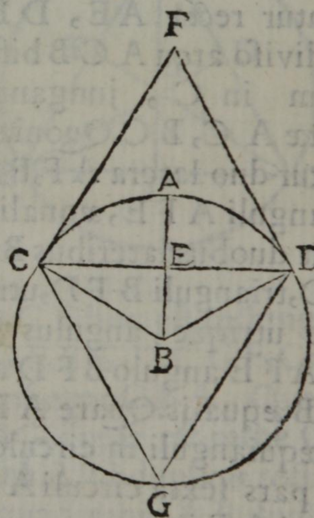


AB latus est trianguli æquilateri in circulo ABC inscripti. Quod erat demonstrandum.

THEOR. LI. PROPOS. LXXXVI.

Si recta linea secuerit semidiametrum circuli bifariam, & ad angulos rectos; latera trianguli æquilateri super ipsa constituti, & extra circulum vergentis ipsum circulum tangent.

Semidiameter A B, circuli D G C, secetur à recta C D bifariam, & ad angulos rectos in E, & super C D constituatur triangulum æquilaterum C D F extra circulum D G C vergens. Dico latera F C, F D, trianguli æquilateri C D F, tangere circulum D G C. Constituatur super D C triangulum æquilaterum D C G intra circulum D G C cadens (quod, per præcedentem, erit in circulo D G C inscriptum) ducāturque semidiametri C B, D B. Quoniam igitur angulus C B D duplus est anguli C G D, qui pars tertia est duorum rectorum; erit ipse duæ tertiæ partes duorum rectorum; adeoque alia pars tertia duorum rectorum erunt anguli B C D, B D C; hoc est erunt duæ tertiæ partes unius recti, qui cum sint inter se æquales; erit unus ipsorum, nempe angulus B C D pars tertia unius recti; est autem angulus F C D duæ terriæ partes

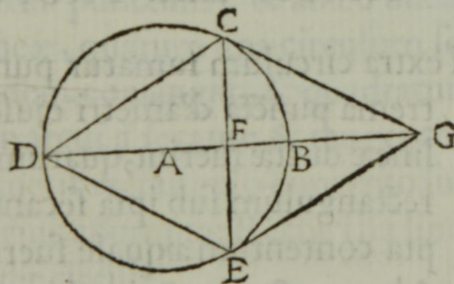


tes unius recti; ergo totus angulus F C B erit tres tertiæ partes unius recti; hoc est rectus; ac propterea recta C F, ab extremitate semidiametri C B ad angulos rectos ducta, tãget circulum D G C. Eâdem ratione F D eundem circulum D G C tanget. Itaque si recta linea secuerit semidiametrum circuli bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. LII. PROPOS. LXXXVII.

Si circuli semidiameter bifariam secta fuerit, & à puncto sectionis perpendicularis ad ipsã excitetur; donec circumpherentiæ occurrat; rectangulum contentum sub composita ex diametro, & semidiametro, & sub semidiametro sola æquale erit quadratis, quæ fiunt alterum à perpendiculari, alterum vero à majori segmento diametri.

DIvidatur semidiameter A B, circuli B C D E, bifariam in F, & à puncto F ad ipsam A B perpendicularis erigatur FC circumpherentiæ occurrens in C. Dico rectãgulũ cõtẽtũ sub recta linea cõposita ex diametro D B, & semidiametro A B, & sub semidiametro sola esse AB ęquale quadratis, quæ fiũt alterũ



à perpẽdiculari F C, alterũ vero à majori segmento F D, diametri B D. Producatur C F in E, & super C E constituatur

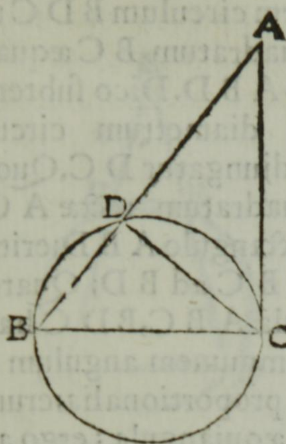
tuatur triangulum æquilaterum C E G extra circulum cadēs; jungāturque C D, E D; erit igitur per cōst. prop. 85. hujus, triangulum C D E æquilaterum, & D B producta, necessario per punctum G transibit, quia triangulum C E G est æquilaterum, & recta F G secat basim C E bifariā, & ad angulos rectos. Quoniam igitur anguli D C F, D F C, trianguli F D C, æquales sunt angulis G C F, G F C, trianguli F G C, uterq; utriq;, & latus C F commune; erit latus D F lateri G F æquale: demptis igitur rectis A F, B F, quæ inter se sunt æquales, remanebūt, D A, B G æquales inter se; recta igitur D G est composita ex diametro D B, & recta B G, quæ semidiametro D A est æqualis. Cū autem D C, C G, inter se sunt æquales erunt ipsarum quadrata inter se æqualia; sed quadrato D C æqualia sunt quadrata C F, F D; ergo quadrata C F, F D quadrato C G æqualia erunt. Et quia, per præcedentem, recta C G tangens est circulum B C D E; erit rectangulum D G B æquale quadrato C G: hoc est quadratis C F, F D. Quare si circuli semidiameter bifariam secta fuerit, & à puncto sectionis perpendicularis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. LIII. PROPOS. LXXXVIII.

Si extra circulum sumatur punctum, & ab eo ad extrema puncta diametri ejusdem circuli duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, quarum una circulum secet, & rectangulum sub ipsa secante, & sub interius asſūpta contentum æquale fuerit quadrato diametri; Altera recta linea circulum tangens erit.

A Puncto A ad extrema puncta B, & C, diametri B C, circuli B C D, sint ductæ duæ rectæ lineæ A B,

A C, quarum A B sit secans circulum B C D, & rectangulum sub ipsa A B, & sub interius assumpta D B æquale sit quadrato diametri B C. Dico alteram rectam A C tangentem esse circulum B C D. Ducatur D C. Quoniam igitur rectangulum A B D æquale est quadrato B C; erit A B ad B C, ut B C ad B D; ideoque quia triangula A C B, C B D habent latera circa communem angulum A B C proportionalia; hoc est A B ad B C, ut B C ad B D; erunt ipsa triangula A C B, C B D æquiangula; ideoque angulus A C B rectus erit, utpote qui æqualis est angulo recto B D C in semicirculo; Quare A C tangens erit circulum B C D. Si igitur extra circulum sumatur punctum, & ab eo, &c. Quod ostendendum erat.



THEOR. LIV. PROPOS. LXXXIX.

Si extra circulum sumatur punctum, & ab eo ductæ fuerint duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera vero eundem contingat, & quadratum rectæ lineæ subtensæ arcui à secante, & tangente intercepto æquale fuerit rectangulo contento sub secante, & sub interius assumpta: Recta illa linea subtensa erit diameter circuli.

A Puncto A extra circulum B D C sint ductæ duæ rectæ lineæ A B, A C, quarum altera A B circulũ

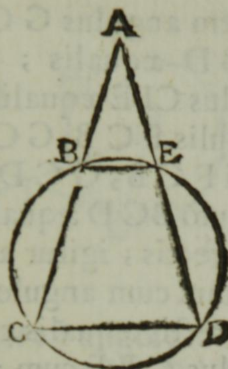
B D C ſecet, altera vero A C eundem circulum B D C tangat, ſitq; quadratum B C æquale rectangulo A B D. Dico ſubtenſam B C eſſe diametrum circuli B D C. Adjungatur D C. Quoniam igitur quadratum rectæ A C æquale eſt rectangulo A B D; erit A B ad B C, ut B C ad B D; Quare cum triangula A B C, B D C habeant circa communem angulum A B C latera proportionalia; erunt ipſa inter ſe æquiangula; ergo angulus B A C angulo B C D erit æqualis. Cũ autem angulus D A C, trianguli A C D æqualis ſit angulo D C B, trianguli C B D, & angulus D C A, ad contactus tangentis A C, æqualis angulo D B C, in alterno ſegmento; erit reliquus angulus A D C reliquo angulo B D C æqualis; idcirco angulus B D C rectus erit; igitur ſegmentum B C D, in quo conſtitutus eſt angulus rectus B D C, ſemicirculus erit; Ac propterea B C circuli diameter eſt. Itaque ſi extra circulum ſumatur punctum, & ab eo, &c. Quod erat probandum.

THEOR. LV. PROPOS. XC.

Si extra circulum ſumatur punctum, ab eoque ductæ fuerint duæ rectæ æquales circulum ſecantes: Rectæ lineæ ſubtenſæ arcubus à ſecantibus interceptis parallelæ inter ſe erunt.

A Puncto A extra circulum B C D E ſint ductæ rectæ A C, A D æquales inter ſe, & circulum B C D E ſe-

ſecantes. Dico rectas B E, C D ſubtenſas arcubus E B, D C interceptis à ſecantibus A C, A D, parallelas inter ſe eſſe. Quoniam igitur rectãgulum ſub A C, A B æquale eſt rectangulo ſub A D, A E; erit A C ad A E, ut A D ad A B, & viciſſim ut A C ad A D, ita A E ad A B; ſunt autem A C, A D inter ſe æquales; igitur A E, A B æquales inter ſe erunt; ac ideo quæ remanent B C E D æquales etiam inter ſe erunt. Quare erit AB ad A E, ut B C ad E D, & permutando A B ad B C, ut A E ad E D; Secta ſunt igitur latera A C, A D, trianguli A C D, proportionaliter in B, E; igitur B E parallela erit baſi C D. Si igitur extra circulum ſumatur punctum, ab eoq; &c. Quod erat demonſtrandum.

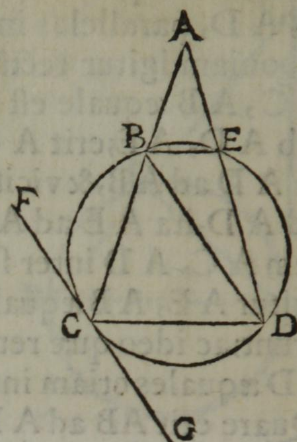


THEOR. LVI. PROPOS. XCI.

Si extra circulum ſumatur punctum, ab eoque duæ rectæ lineæ ductæ fuerint circulum ſecantes, & rectæ lineæ ſubtenſæ arcubus ab ipſis interceptis fuerint parallelæ: ſecantes inter ſe æquales erunt.

A Puncto A extra circulum B C D E ſint ductæ duæ rectæ A C, A D ſecantes circulum B C D E, & rectæ B E, C D ſubtenſæ arcubus E B, D C ab ipſis ſecãtibus A C, A D, ſint inter ſe parallelæ. Dico ſecantes A C, A D æquales inter ſe eſſe. Ducatur F G tangens circulum B C D E in C, jungaturq; B D. Quoniam igitur angulus F C B æqualis eſt angulo B D C, & eidem angulo

B D C æqualis eſt angulus E B D; erunt anguli F C B, E B D inter ſe æquales; Eſt autem angulus G C D angulo C B D æqualis; igitur totus ãgulus CBE æqualis eſt duobus angulis F C B, G C D; ſed anguli F C B, G C D, ſimul cum angulo BC D æquales sũt duobus rectis; igitur angulus C B E ſimul cum angulo BCD duobus rectis æqualis erit; ſed idẽ ãgulus C B E cum angulo C D E etiã duobus rectis eſt æqualis: igitur anguli B C D,E D C æquales inter ſe erunt; ac propterea ſecantes A C, A D ipſis oppoſitæ æquales inter ſe ſunt. Si extra circulum ſumatur punctum, ab eoque duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

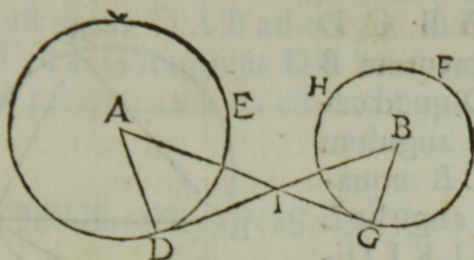


THEOR. LVII. PROPOS. XCII.

Si à centris duorũ circulorum,ſive ſe exterius tangãt, ſive non, duæ tangentes ipſos circulos,ſeſe mutuò ſecantes,demittantur, rectangulum comprehensũ ſub ſegmentis unius æquale erit ei, quod ſub ſegmentis alterius continetur rectangulo.

A Centris A, B circulorum C D E, F G H ducantur rectæ AG,BD circulos CD E,FGH tãgẽtes:hoc eſt A G tangens circulum F G H,B D verò circulum C D E, quæ ſeſe mutuo ſecent in I. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis A I, I G tangentis A G æquale eſſe ei, quod ſub ſegmentis B I, I D tangentis B D contine-

tinetur, rectangulo. A centris A, B ad contactus D, G duæ rectæ AD, B G ducantur. Quoniam igitur rectæ A D, B G sunt ad D B, G A perpẽdiculares; erit ãgulus A D I, triãguli AID,



æqualis angulo B G I, triãguli B I G, & est angulus A I D æqualis ãgulo B I G; erit ergo reliquus angulus DA I reliquo angulo G B I æqualis. Quare triangula A D I, B G I æquiangula inter se erunt; ac propterea latera A I, I D trianguli D A I, & latera B I, I G, trianguli B G I, quæ circa æquales angulos A I D, B I G sunt, proportionalia erunt; hoc est erit A I ad I D, ut B I ad I G; adeoq; rectangulum comprehensum sub extremis A I, I G; hoc est sub segmentis tangentis A G æquale erit ei, quod sub mediis B I, I D; hoc est sub segmentis tangentis B D cõprehenditur, rectangulo. Quapropter si à centris duorum circulorum, sive se exterius tangant, sive non, duæ tangentes, &c. Quod ostendendum erat.

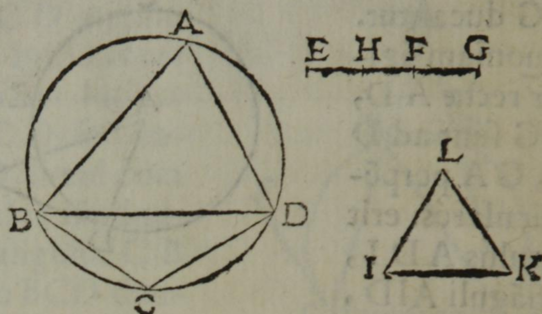
PROBL. XXXVI. PROPOS. XCIII.

Circuli peripheriam in datâ proportione secare.

SIt secanda peripheria A B C D in data proportione rectæ E F ad F G. Dividatur E F, quam volumus esse antecedentem proportionis, bifariam in H, & constituatur triangulum isosceles I L K, per propos: 37. lib. 1. collec. Pappi, cujus uterq; angulorũ L I K, I K L, qui ad basin I K sunt, habeat ad reliquum I L K proportionem,

 quam

quam habet recta H F ad rectam F G. Deinde abſcindatur à circulô A B C D ſegmentum B C D, quod capiat angulum D C B æqualem angulis L I K, L K I. Dico peripheriã A B C D diviſam eſſe in



datâ proportione rectæ E F ad F G; hoc eſt eſse arcum B A D ad arcum D C B, ut recta E F ad F G. In ſegmentô B A D conſtituatur angulus D A B. Quoniam igitur E H, H F inter ſe ſunt æquales, habebunt ad eandem F G eandem proportionem. Eâdemq; ratione quia anguli L I K, L K I, ſunt inter ſe æquales, habebunt ad eundem angulum I L K eandem proportionem. Quare cum angulus L I K habeat ad angulum I L K proportionem rectæ H F ad F G, habebit etiam angulus L K I ad angulum I L K proportionem eandem, ac habet recta H F; hoc eſt recta E H ad F G. Itaque cum prima L I K ad ſecundam I L K eandem habeat proportionem, quam tertia H F ad quartam F G, & quinta L K I ad ſecundam I L K eandem habeat proportionem, quam ſexta E H ad quartam F G: compoſita ex primâ L I K, & quintâ L K I habebit ad ſecundam I L K eandem proportionem, ac habet E F compoſita ex primâ E H, & ſextâ H F ad quartam F G; hoc eſt erit angulus B C D, qui æqualis eſt angulis L I K, L K I, ad angulum I L K, ut E F ad F G. Et quia angulus B C D æqualis eſt, ex conſtructione angulis I K L, K I L; erit reliquus angulus B A D reliquo angulo I L K æqualis (nam tam anguli B C D, B A D, quam anguli I K L, K I L, I

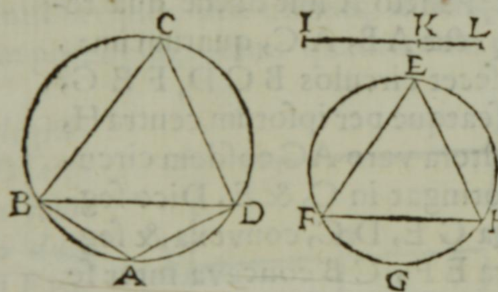
LK

LK duobus rectis sũt æquales;adeoq;ãgulus BCD erit ad angulum B A D, ut E F ad F G;sed ut angulus B C D ad angulum B A D,ita est arcus D A B ad arcum D C B; igitur erit etiã ut E F ad F G ita arcus DA B ad arcum, DC B. Circuli igitur peripheria secta est,&c.Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVII. PROPOS. XCIV.

Ex duobus quibuslibet circulis duo segmenta abscindere, quæ capiant duos angulos datam proportionem tenentes.

EX circulis A B C D, E F G H abscindere oportet duo segmenta, quæ capiant duos angulos datam proportionem rectæ I K ad K L habentes. Dividatur per præcedentem peripheria A B C D in datâ proportione I K ad K L; hoc est sit ut I K ad K L,ita segmentum B C D ad segmentum B A D, quibus insistant anguli B A D, B C D. auferatur deinde à circulô E F G H segmentum F E H, quod capiat angulum H E F æqualem angulo B C D. Dico segmenta B A D,F E H, abscissa à circulis A B C D, E F G H,capere angulos B A D, F E H habentes proportionem rectæ I K ad k L. Quoniam igitur segmentum B C D ad segmentum BAD est ut I K ad K L, & ut idem segmentum B C D ad segmentum

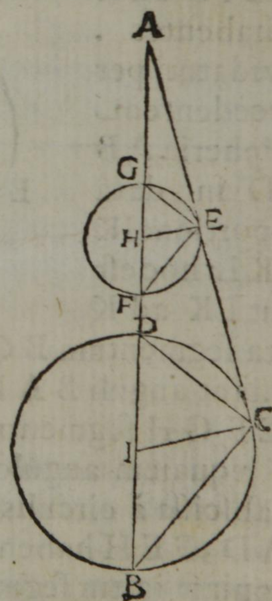


mentum B A D, ita eſt angulus B A D ad angulum B C D; erit ut I K ad K L, ita angulus B A D ad angulum B C D: hoc eſt ad angulũ F E H, ſunt enim anguli B C D, F E H, ex conſtructione, inter ſe æquales. Ex duobus igitur circulis abſciſſa ſunt duo ſegmenta, quæ, &c. Quod erat faciendum

THEOR. LVIII. PROPOS. XCV.

Si duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ fuerint, quarum una ſecet duos circulos, tranſeatque per ipſorum centra, altera vero eoſdem contingat: ſegmenta circulorum ab ipſis intercepta ſive convexa, ſive concava ſimilia inter ſe erunt, & inſuper rectæ lineæ ipſis ſubtenſæ erunt inter ſe parallelæ.

A Puncto A ſint ductæ duæ rectæ A B, A C, quarum una A B ſecet circulos B C D, F E G, tranſeatque per ipſorum centra H, & I, altera vero A C eoſdem circulos cotingat in C, & E. Dico ſegmenta G E, D C, convexa, & ſegmenta E F, C B concava inter ſe ſimilia eſſe, & inſuper rectas G E, D C, E F, C B, ipſis ſubtenſas parallelas inter ſe eſſe, utrãq; utriq; A cẽtris H, & I ad puncta cõtactus E, C adjungantur rectæ H E, I C. Quoniam igitur anguli AEH, ACI ſunt inter ſe æquales: (ambo enim ſunt recti) erunt H E, I C inter ſe parallelæ; quare anguli

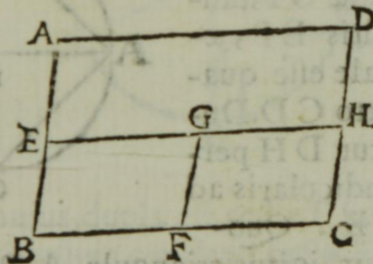


GHE,

G H E,D I C inter se æquales erunt;sed angulus G H E duplus est anguli G F E,& angulus D I C duplus anguli D B C;igitur anguli G F E,D B C æquales inter se erunt; adeoq; segmenta G E,D C similia inter se erunt.Eadem ratione quia anguli F G E,B D C sunt inter se æquales; erunt segmenta E F,C B similia inter se.Quod rectæ G E, D C, & rectæ E F, C B sint inter se parallelæ,est manifestũ,ostẽdimus enim angulos G F E, D B C esse inter se æquales, item,& angulos F G E,B D C æquales inter se. Si duæ igitur rectæ lineæ ab eodem pũcto ductæ fuerint, quarum una secet duos circulus, transeatq; &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA.

Si parallelogrammũ habuerit bina latera ipsum comprehendentia dupla duorum laterum alterius parallelogrammi, similis, similiterque positi utrumq; utriusque: Parallelogrammum parallelogrammi quadruplum erit.



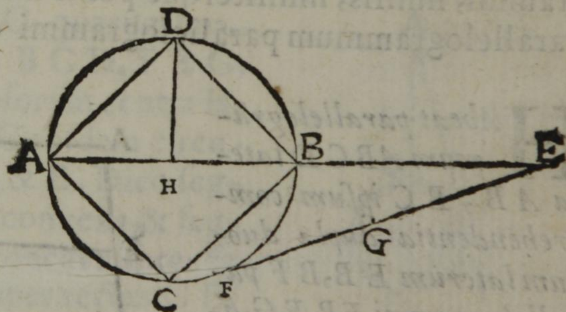
Habeat parallelogrãmum A B C D latera A B, B C ipsum comprehendentia dupla duorum laterum E B, B F parallelogrammi E B F G, similis, similiterque positi, utrumque utriusq; hoc est latus A B duplum lateris E B, & B C duplum lateris B F. Dico parallelogrammum A C quadruplum esse parallelogrammi E F, similis similiterq; positi. Producatur recta E G in H. Quoniam ergo B C dupla est rectæ B F; erit parallelogrãmũ E C parallelogrammi E F duplum. & quia recta B E æqualis est rectæ E A; erit parallelogrammum A H parallelogram-

logrammo E C æquale; ergo igitur totum parallelogrammum A C duplum erit parallelogrammi E C; atqui parallelogrãmum E C duplum est parallelogrammi E F; igitur parallelogrammum A C quadruplum erit parallelogrammi E F. Quod erat probandum.

THEOR. LIX. PROPOS. XCVI.

Si diameter circuli producta fuerit, ita ut adjuncta sit æqualis diametro, & ab extremitate adjunctæ ducatur recta tangens circulum: quadratum dimidiæ tangentis æquale erit quadrato in circulo inscripto.

SIt producta diameter A B, circuli A C B D in E, ita ut B E æqualis sit diametro A B, dividaturq; tangens E F bifariam in G. Dico quadratum dimidiæ G F, tangentis E F, æquale esse quadrato C D. Ducatur D H perpendicularis ad A B. Quoniam igitur triangula A B D, B D H sunt inter se similia; erit diameter A B ad rectam B D, ut recta B D ad semidiametrum B H. Quare erit quadratum rectæ B D; hoc est quadratum C D æquale rectangulo A B H. Cum autem rectangulum A E B quadruplum sit, per antecedens lemma, rectanguli A B H, & quadratum tangentis E F æquale rectangulo A E B; erit quadratum tã-

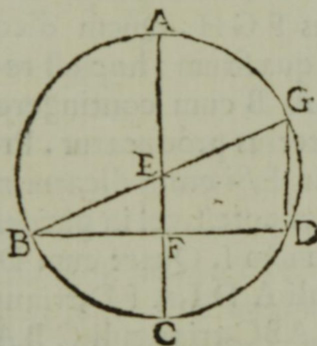


gen-

gentis F F quadruplum rectanguli A B H; hoc est quadrati C D; Sed idem quadratum tangentis E F quadruplum est quadrati ipsius dimidiæ G F; erit ergo quadratum rectæ G F, quæ dimidia est tangentis E F, æquale quadrato CD, in circulo A C B D inscripto. Si igitur diameter circuli producta fuerit, &c. Quod erat demõstrãdũ.

THEOR. LX. PROPOS. XCVII.

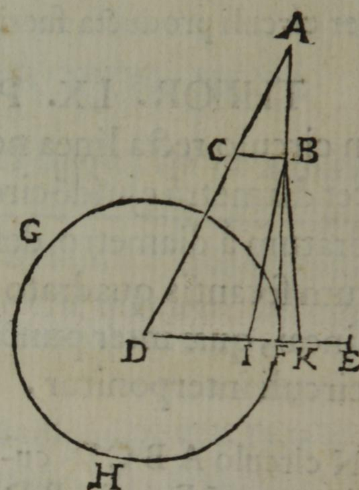
Si in circulo recta linea non per centrum extensa secet diametrũ ejusdẽ circuli ad angulos rectos; quadratum à diametro descriptum excedet quadratum secantis quadrato quadruplo quadrati rectæ lineæ, quæ inter punctum sectionis, & centrum circuli interponitur.



IN circulo A B C D, cujus centrũ E, recta B D secet diametrum A C ad angulos rectos in F. Dico quadratum diametri A C excedere quadratum secãtis B D quadrato quadruplo quadrati rectæ E F. Ducatur diameter B G, jungaturq; D G. Quoniam igitur, basis D G, per propos: 71. hujus, dupla est rectæ F E; erit quadratum rectæ D G quadruplum quadrati rectæ F E. Cum autem quadratum B G æquale sit quadratis rectarum B D, D G; dempto quadrato rectæ D G; excedet propterea quadratum rectæ B G; hoc est diametri A C quadratum secantis B D quadrato rectæ D G, quod quadruplum est, ex demonstratis, quadrati rectæ F E. Si igitur in circulo recta linea, &c. Quod erat probandum.

PROBL. XXXVIII. PROPOS. XCVIII.

Data recta linea, circulum describere, ita ut, si data recta linea producatur eum contingat.



A Puncto B erigatur B C perpendicularis ad datam A B, jungaturque A C, quæ producatur utcunque in D. deinde ducta D E parallela ad C B, sumatur ex D E recta D F, ita ut sit A D ad D F, ut A C ad C B. Denique centro D, intervallo vero D F, describatur circulus F G H. Quem dico esse quæsitum; hoc est rectã A B eum contingere si ulterius producatur. Producatur igitur A B, quæ cadet in F; Si enim dicatur non cadere in puncto F. Cadat, si fieri potest, vel in pũcto I, vel in puncto K. Cadat primũ in puncto I. Quare cum D I parallela sit rectæ C B; erunt anguli A D I, A I D, trianguli D I A, æquales angulis A C B, ABC, trianguli C B A: adeoque triãgula D I A, CBA æquiangula inter se erunt; Idcirco erit A D, ad D I, ut A C ad C B; sed ut A C ad C B, est etiam A D ad D F; ergo erit A D ad D I, ut eadem A D ad D F; A D igitur eandem proportionem habet ad D F, & D I. Quapropter D F, D I inter se æquales erunt. Pars toti. Quod est absurdum. Si vero dicatur A B cadere in puncto K. Eodẽ argumento ostendemus, partem D F toti D K esse æqualem. Recta igitur A B cadet in puncto F; ac ideo tanget circulum F G H, nam D F parallela est rectæ

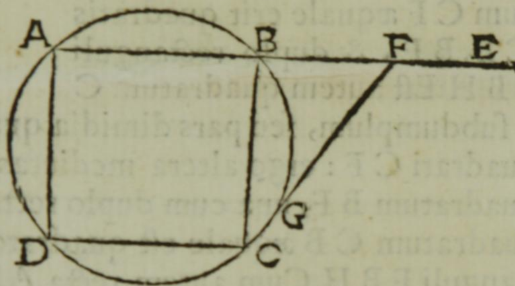
C B;

CB; quare angulus A F D rectus erit,utpote,qui æqualis angulo recto A B C. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXIX. PROPOS. XCIX.

In producto latere quadrati in circulo inscripti,invenire punctum, à quo ductâ tangente ipsum circulum sit quadratum tangentis æquale quadrato in circulo inscripto.

Ex latere A B utcunq; producto in E abscindatur A F, ita ut A B sit, per propofit. 9. hujus,media proportionalis inter totam A F, & adjunctam B F. Dico F esse punctũ de quo quæritur.

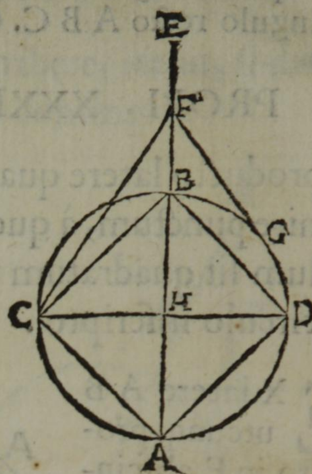


Ducatur igitur F G circulum D C B A tangens. Quoniam igitur AB est media proportionalis inter totam A F, & adjunctam B F; erit quadratum A C, à media A B descriptum,æquale rectangulo A F B; sed eidem rectangulo A F B æquatur quadratum tangentis F G; ergo quadratum A C, & quadratum tangentis F G inter se erunt æqualia. Quod erat faciendum.

PROBL. XL. PROPOS. C.

In diametro circuli producta invenire punctum, à quo ducta tangente circulum, sit quadratum tangentis æquale quadrato in circulo inscripto.

Dia-



Diameter AB secetur à diametro C D ad angulos rectos, & centro C, intervallo vero C D, secetur B E in F. Dico F esse punctum quæsitum. Ducatur igitur FG tangens circulum A C B D, jungaturque C F. Quoniam igitur angulus F B C major est angulo recto B H C; erit triangulum C B F obtusangulum. Quare quadratum C F æquale erit quadratis C B, B F, & duplo rectanguli F B H: Est autem quadratum C B subdumplum, seu pars dimidia quadrati C D; hoc est quadrati C F: ergo altera medietas quadrati C F erit quadratum B F, una cum duplo rectanguli F B H; igitur quadratum C B æquale est quadrato B F, & duplo rectanguli F B H. Cum autem recta A B secta sit bifariam in H, & ei adjecta sit in rectum B F; erit rectangulum A F B, una cum quadrato B H æquale quadrato F H; sed eidem quadrato F H æqualia sunt quadrata F B, B H, & duplum rectanguli F B H; ergo quadrata F B, B H, & duplum rectanguli F B H æqualia erunt rectangulo A F B, & quadrato B H; Ablato igitur cõmuni quadrato BH; erit rectangulum A F B æquale quadrato F B, & duplo rectanguli F B H; hoc est quadrato C B; Est autem quadratum tangentis F G æquale eidem rectangulo A F B; ergo igitur quadratum tangentis F G, & quadratum rectæ C B; hoc est quadratum C D, in circulo inscriptum, inter se sunt æqualia. In diametro igitur producta circuli inventum est, &c. Quod faciendum erat.

F I N I S.

KONSERVIERT DURCH
ÖSTERREICHISCHE FLORENZHILFE
WIEN 1967